XI

d

Math

Journal für die reine und angewandte Mathematik

DARTMOUTH COLLEGE
OCT 6 1961
LIBRARY

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 208

Heft 1/2

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1961

Band 208. Heft 1/2

Inhaltsverzeichnis

Seite

Helmberg, Gilbert, Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. II. 1

Laugwitz, Detlef, Anwendungen unendlicher kleiner Zahlen 22

Kubota, Tomio, Reciprocities in Gauss' and Eisenstein's number fields. . . . 35

Runck, Paul Otto, Über Konvergenzfragen bei Polynominterpolation mit äquidistanten Knoten. I. 51

Mahler, K., An interpolation Series for continuous functions of a p-adic variable 70

Fong, P. and Gaschütz, W., A note on the modular representations of solvable groups 73

Rieger, G. J., Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. III. 79

Cairns, S. S., Umschreibende Würfel von konvexen Körpern in euklidischen Räumen 91

Halmos, Paul R., Shifts on Hilbert spaces 102

Einsendung von Druckmanuskripten erbeten an den Herausgeber:

Prof. Dr. H. Hasse, (24a) Ahrensburg bei Hamburg, Hagener Allee 35

Die Schriftleitung bittet, die Manuskripte in leserlicher Schrift, möglichst mit der Schreibmaschine, zu schreiben. Formeln sollten mit der Hand eingetragen sein. Es empfiehlt sich, den Manuskripten Anweisungen für den Setzer beizulegen, insbesondere die vorkommenden deutschen, griechischen, Antiqua- und sonstige besondere Typen durch farbige Unterstreichungen zu kennzeichnen, ebenso kursiven, gesperrten oder fetten Satz hervorzuheben. Für etwaige Figuren werden reproduktionsfähige Reinzeichnungen mit Tusche auf Pergamentpapier erbeten.

Die Herrn Autoren erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos, weitere gegen Berechnung.

Einzelheiten über den Korrekturgang sind aus den Laufzetteln zu ersehen, die den Korrektursendungen beigefügt werden.

Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. II.

Von *Gilbert Helmberg* in Mainz.

Einleitung.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit (Journ. f. reine u. angew. Math. 207 (1961), 31—52) befaßte sich mit Zerlegungen des auf einem vollen Modul von fp. Funktionen auf einer Gruppe X gegebenen Mittelwertes und verwandter Funktionale in iterierte Mittelwerte über geeignete endliche oder unendliche Systeme von Untergruppen.

In § 5 des vorliegenden zweiten Teiles werden diese Ergebnisse auf den besonderen Fall der Algebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf einer kompakten Hausdorffschen Gruppe X angewandt. Sie lassen dabei zwei eng miteinander zusammenhängende maßtheoretische Deutungen zu: einmal als Zerlegungen des Haar-Integrales und verwandter Funktionale in iterierte Haar-Integrale über geeignete Systeme von Untergruppen, und zweitens als endliche oder unendliche Faktorisierungen des Haarschen Maßes und verwandter Verteilungsmaße auf X in Faltungsprodukte einfacherer Verteilungsmaße. Da hierüber bereits eine ausgedehnte Literatur existiert und jede Gruppe homomorph als dichte Untergruppe in eine kompakte Hausdorffsche Gruppe eingebettet werden kann, wobei die fp. Funktionen eines vorgegebenen vollen Moduls in die stetigen Funktionen auf der kompakten Gruppe und der Mittelwert in das Haar-Integral übergehen, eröffnet sich damit ein neuer Zugang zu den Ergebnissen der Paragraphen 3 und 4 des ersten Teiles dieser Arbeit. Wir werden auf die Spezialisierung der einzelnen Sätze jedoch nur insoweit eingehen, als sich dabei neue Fragestellungen ergeben.

In § 6 wird schließlich der Versuch gemacht, die Ergebnisse der vorangegangenen Paragraphen in den größeren Rahmen der Theorie der Gleichverteilung einzuordnen. Grundlage hierfür ist eine entsprechende Erweiterung des Begriffes der Gleichverteilung. Für die besonderen Fragestellungen der vorliegenden Arbeit ergibt sich hieraus noch eine Klärung des Zusammenhanges mit anderen Gleichverteilungssätzen, besonders einem Gleichverteilungssatz von Maak (s. [12]), und eine Grenzwert-Darstellung des Mittelwertes von fp. Funktionen auf Abelschen Gruppen.

Der Verfasser ist Herrn Karl Stromberg für die Überlassung eines Exemplares seiner noch unveröffentlichten Dissertation [13] zu Dank verpflichtet. Die Literaturhinweise in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der vorliegenden Arbeit.

§ 5. Kompakte Gruppen.

Wir wenden die Ergebnisse der vorangegangenen Paragraphen auf eine kompakte Hausdorffsche Gruppe X und die Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}(X)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X an und unterlassen künftig die Angabe von $\mathfrak{A}$, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist. Der Modul $\{D^{(\lambda)}: \lambda \in L\}$ ist hier ein vollständiges System nicht äquivalenter irreduzibler unitärer stetiger Darstellungen von X. Unter einer Untergruppe werden wir künftig immer eine abgeschlossene Untergruppe verstehen, die also in der relativierten Topologie wieder kompakt und Hausdorffsch ist. Das Produkt $X_1 \cdots X_n$ einer endlichen Zahl von Untergruppen $X_i (i = 1, \ldots, n)$ ist kompakt und daher wieder abgeschlossen in X.

Jedem auf $\mathfrak{C}(X)$ gegebenen beschränkten linearen Funktional ν entspricht eineindeutig ein reguläres abzählbar additives Borelsches Maß von endlicher totaler Variation, das wir der Einfachheit halber wieder mit ν bezeichnen werden, und zwar gilt $\nu(f) = \int_X f(x)\, d\nu(x)$ für alle $f \in \mathfrak{C}(X)$. Der Mittelwert M ist auf $\mathfrak{C}(X)$ identisch mit dem normierten Haarschen Integral

$$\mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \qquad f \in \mathfrak{C}(X).$$

Den über eine Untergruppe X_ϱ erstreckten Mittelwert M_ϱ bezeichnen wir mit μ_ϱ und schreiben

$$\mu_\varrho(f) = \int_X f(x)\, d\mu_\varrho(x) = \int_{X_\varrho} f(x)\, d\mu'_\varrho(x) \qquad f \in \mathfrak{C}(X), \tag{38}$$

wobei μ'_ϱ das Haarsche Maß auf der Gruppe X_ϱ bedeutet. Ist $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ein endliches System von Untergruppen von X und $f \in \mathfrak{C}(X)$, so ist die durch $f_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 \cdots x_n)$ definierte Funktion f_1 infolge der Stetigkeit der Gruppenmultiplikation eine stetige Funktion auf dem direkten Produkt $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$. Der über dieses direkte Produkt erstreckte Mittelwert (4) hat dann die Form

$$\mu_{1,\ldots,n}(f) = \int_{X_n} \cdots \int_{X_1} f(x_1 \cdots x_n)\, d\mu'_1(x_1) \cdots d\mu'_n(x_n) \qquad f \in \mathfrak{C}(X).$$

Wir untersuchen also, unter welchen Bedingungen auf $\mathfrak{C}(X)$ eine Zerlegung des Haarschen Integrales von der Form

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{X_n} \cdots \int_{X_1} f(x_1 \cdots x_n)\, d\mu'_1(x_1) \cdots d\mu'_n(x_n) \qquad f \in \mathfrak{C}(X)$$

existiert.

Die lineare und topologische Struktur des zu $\mathfrak{C}(X)$ konjugierten Raumes $\mathfrak{C}^*(X)$ wird auf die Menge der den Funktionalen aus $\mathfrak{C}^*(X)$ entsprechenden Maße übertragen. Es sei $\mathfrak{B}$ die Familie aller Borelschen Mengen in X. Einem monotonen Funktional ν entspricht ein reelles nicht negatives Maß ν, ein monotones normiertes Funktional ist darüber hinaus durch $\nu(X) = 1$ gekennzeichnet. Ein derartiges Maß werden wir künftig als Verteilungsmaß bezeichnen. Unter den Verteilungsmaßen für X ist das Haarsche Maß μ durch die Gleichungen

$$\mu(Ex) = \mu(xE) = \mu(E) \text{ für alle } E \in \mathfrak{B} \text{ und alle } x \in X \tag{39}$$

gekennzeichnet. Das auf einer Untergruppe X_ϱ von X gegebene Haarsche Maß μ'_ϱ können wir in Übereinstimmung mit (38) durch die Definition

$$\mu_\varrho(E) = \mu'_\varrho(E \cap X) \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{B}$$

zu einem Verteilungsmaß auf X erweitern (s. [14], 2, 3).

Es sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller Verteilungsmaße auf X und $\mathfrak{X}$ die Menge aller Verteilungsmaße μ_ϱ, die durch Erweiterung des Haarschen Maßes μ'_ϱ einer Untergruppe X_ϱ von X auf X entstehen. Für $\nu_1 \in \mathfrak{B}$ und $\nu_2 \in \mathfrak{B}$ definieren wir ein Verteilungsmaß $\nu_1 * \nu_2$ durch

$$\nu_1 * \nu_2(f) = \int_X \int_X f(x_1 x_2)\, d\nu_1(x_1)\, d\nu_2(x_2) \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{C}(X).$$

Explizit ergibt sich (s. [13], 2. 3)

$$(40) \quad \nu_1 * \nu_2(E) = \int_X \nu_1(Ex^{-1})\, d\nu_2(x) = \int_X \nu_2(x^{-1}E)\, d\nu_1(x) \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{B}.$$

Bezüglich der Operation $*$ als Multiplikation ist $\mathfrak{B}$ eine kompakte Hausdorffsche Halbgruppe. Ein Maß $\nu \in \mathfrak{B}$ ist dann und nur dann idempotent ($\nu * \nu = \nu$), wenn $\nu \in \mathfrak{X}$ gilt (s. [14], 3).

Als Träger $T(\nu)$ eines Verteilungsmaßes ν bezeichnen wir die Menge aller Punkte $x \in X$, für die jede Umgebung U positives Maß besitzt. Für $\nu \in \mathfrak{B}$ ist $T(\nu)$ abgeschlossen, für $\nu_1 \in \mathfrak{B}$ und $\nu_2 \in \mathfrak{B}$ gilt $T(\nu_1 * \nu_2) = T(\nu_1)\, T(\nu_2)$. Für $\nu = \mu_\varrho \in \mathfrak{X}$ gilt $T(\mu_\varrho) = X_\varrho$ (s. [14], 3).

Für $\nu \in \mathfrak{B}$ sei $\nu(D^{(\lambda)})$ die Matrix $(\nu(d_{ik}^{(\lambda)}))$. Die durch $\vartheta^{(\lambda)}(\nu) = \nu(D^{(\lambda)})$ definierte Abbildung $\vartheta^{(\lambda)}$ ist ein (stetiger) Homomorphismus der kompakten Halbgruppe $\mathfrak{B}$ auf eine kompakte Matrizenhalbgruppe $\vartheta^{(\lambda)}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^{(\lambda)}$. Es gilt also $\vartheta^{(\lambda)}(\nu_1 * \nu_2) = \vartheta^{(\lambda)}(\nu_1) \cdot \vartheta^{(\lambda)}(\nu_2)$. Die Abbildung ϑ von $\mathfrak{B}$ in das direkte Produkt $\bigotimes_{\lambda \in L} \mathfrak{B}^{(\lambda)}$, die durch $[\vartheta(\nu)]^{(\lambda)} = \vartheta^{(\lambda)}(\nu)$ definiert ist, ist ein (topologischer) Isomorphismus der kompakten Halbgruppe $\mathfrak{B}$ in eine Unter-Halbgruppe des direkten Produktes $\bigotimes_{\lambda \in L} \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ (s. [6]; die Originalarbeit war dem Verfasser nicht zugänglich).

Konvergenz eines Netzes von Verteilungsmaßen ν_ϱ in der schwachen Topologie ist gleichbedeutend mit der Konvergenz des Netzes der zugehörigen Funktionale ν_ϱ, kann aber auch wie folgt erklärt werden. Eine Borelmenge E heißt Stetigkeitsmenge eines Maßes $\nu \in \mathfrak{B}$, wenn das ν-Maß des Randes von E Null ist. Ein Netz $\mathfrak{N} = \{\nu_\varrho : \varrho \in R\}$ in $\mathfrak{B}$ konvergiert gegen $\nu \in \mathfrak{B}$, wenn

$$\lim_{\mathfrak{N}} \nu_\varrho(E) = \nu(E) \quad \text{für jede } \nu\text{-Stetigkeitsmenge } E \in \mathfrak{B}$$

ist. Wir benötigen später den folgenden Hilfssatz, den wir zusammen mit der eben gemachten Feststellung der bereits zitierten Arbeit von K. R. Stromberg entnehmen (s. [13], 2. 5).

Hilfssatz 5. *Für jedes Maß $\nu \in \mathfrak{B}$ und jeden Punkt $x \in X$ existiert ein aus ν-Stetigkeitsmengen bestehendes Umgebungssystem für x.*

In der dargelegten maßtheoretischen Interpretation handelt es sich bei unserer Fragestellung also um Faktorisierungen von der Form

$$\mu_0 = \mu_1 * \cdots * \mu_n \qquad \mu_i \in \mathfrak{X} \ (i = 0, 1, \ldots, n)$$

oder um unendliche Faktorisierungen im Sinne der schwachen Topologie von der Form

$$\mu_0 = \lim_{\mathfrak{N}} \mu_{\varrho_1} * \cdots * \mu_{\varrho_n} \qquad \mu_0 \in \mathfrak{X},\ \mu_\varrho \in \mathfrak{X}\ (\varrho \in R).$$

Wenn wir die angeführten Ergebnisse zu Hilfe nehmen, lassen sich die Spezialisierungen der Sätze der Paragraphen 3 und 4 auf den Fall einer kompakten Gruppe zum Teil auch leicht direkt beweisen. Wir greifen zur Illustration einige Beispiele heraus.

Satz 2'. *Es gilt* $\mu = \mu_1 * \cdots * \mu_n$ *dann und nur dann, wenn* $\prod_{i=1}^{n} \mu_i(D^{(\lambda)}) = 0$ *für alle* $\lambda \neq 1$ *gilt.*

Dies folgt unmittelbar aus dem Isomorphismus zwischen $\mathfrak{B}$ und $\vartheta(\mathfrak{B})$ und den Orthogonalitätsrelationen der Darstellungskoeffizienten. Gleiches gilt für Satz 8.

Satz 5'. *Es sei für jede zyklische Permutation* $(i_1, \ldots, i_n)$ *der Indexfolge* $(1, \ldots, n)$

$$\mu_{i_1} * \cdots * \mu_{i_n} = \mu_1 * \cdots * \mu_n.$$

Dann ist $X_1 \cdots X_n = X_0$ *eine Untergruppe von* X *und* $\mu_1 * \cdots * \mu_n = \mu_0$.

Da die Maße $\mu_i (i = 1, \ldots, n)$ idempotent sind, ergibt sich nämlich aus der Assoziativität des $*$-Produktes

$$\begin{aligned}(\mu_1 * \cdots * \mu_n) * (\mu_1 * \cdots * \mu_n) &= (\mu_1 * \cdots * \mu_n) * (\mu_n * \mu_1 * \cdots * \mu_{n-1}) \\ &= (\mu_1 * \cdots * \mu_{n-1}) * (\mu_n * \mu_1 * \cdots * \mu_{n-1}) = \cdots \\ &= \mu_1 * \cdots * \mu_n.\end{aligned}$$

Das Maß $\mu_1 * \cdots * \mu_n$ ist also idempotent, somit das (erweiterte) Haarsche Maß auf einer Untergruppe X_0. Da X_0 der Träger dieses Maßes ist, gilt $X_0 = T(\mu_1) \cdots T(\mu_n) = X_1 \cdots X_n$. Unter den obigen Voraussetzungen ist $\mu_1 * \cdots * \mu_n = \mu$ genau dann, wenn $X_1 \cdots X_n = X$ ist.

Die Voraussetzung von Satz 5' ist insbesondere erfüllt, wenn die Maße μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ zum Zentrum $\mathfrak{Z}$ der Halbgruppe $\mathfrak{B}$ gehören. Wir können diese Maße als jene Maße in $\mathfrak{B}$ charakterisieren, deren Träger Normalteiler von X sind. Wir weisen dies in den folgenden beiden Hilfssätzen nach.

Hilfssatz 6. *Es seien* X_1 *und* $X_2 = x^{-1} X_1 x$ $(x \in X)$ *konjugierte Untergruppen von* X. *Dann gilt*

$$\mu_2(E) = \mu_1(xEx^{-1}) \text{ für alle } E \in \mathfrak{B}.$$

Beweis: Es seien $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die Familien der Borelmengen in den kompakten Gruppen X_1 bzw. X_2. Da X_1 und X_2 kompakt in X sind, sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die Beschränkungen von $\mathfrak{B}$ auf X_1 bzw. X_2. Mit E ist auch xEx^{-1} Borelmenge in X; gehört E zu $\mathfrak{B}_2$, dann gehört xEx^{-1} zu $\mathfrak{B}_1$. Wir zeigen zunächst, daß $\mu_1(xE_2x^{-1})$ $(E_2 \in \mathfrak{B}_2)$ das Haarsche Maß auf X_2 ist. Dazu genügt es, die Invarianzeigenschaft (39) nachzuweisen. Für $x_2 \in X_2$ gilt $xx_2x^{-1} \in X_1$ und

$$\mu_1(xE_2x_2x^{-1}) = \mu_1(xE_2x^{-1}xx_2x^{-1}) = \mu_1(xE_2x^{-1}).$$

Analoges gilt für Linkstranslation. Es folgt $\mu_1(xE_2x^{-1}) = \mu_2(E_2)$ und weiter für $E \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned}\mu_2(E) = \mu_2'(E \cap X_2) = \mu_2(E \cap X_2) &= \mu_1(xEx^{-1} \cap xX_2x^{-1}) \\ &= \mu_1'(xEx^{-1} \cap X_1) = \mu_1(xEx^{-1}).\end{aligned}$$

Hilfssatz 7. *Das Maß* $\mu_0 \in \mathfrak{X}$ *ist dann und nur dann im Zentrum* $\mathfrak{Z}$ *von* $\mathfrak{B}$, *wenn* $X_0 = T(\mu_0)$ *Normalteiler von* X *ist.*

Beweis: Wir betrachten mit jedem Element $x \in X$ das zugehörige Punktmaß $\varepsilon_x \in \mathfrak{B}$, das durch

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(E) &= 1, \text{ wenn } x \in E, \quad E \in \mathfrak{B}, \\ \varepsilon_x(E) &= 0, \text{ wenn } x \notin E, \quad E \in \mathfrak{B},\end{aligned}$$

definiert ist. Der Träger von ε_x ist $\{x\}$. Aus $\mu_0 \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ folgt $\mu_0 * \varepsilon_x = \varepsilon_x * \mu_0$ für alle $x \in X$. Für die Träger gilt dementsprechend $X_0 x = x X_0$ für alle $x \in X$, also ist X_0 Normalteiler von X. Ist umgekehrt X_0 Normalteiler von X, dann gilt für jedes Element $x \in X$ die Gleichung $X_0 = x^{-1} X_0 x$, nach Hilfssatz 6 somit

$$\mu_0(xE) = \mu_0(Ex) \text{ für alle } E \in \mathfrak{B} \text{ und alle } x \in X.$$

Für jedes Maß $\nu \in \mathfrak{B}$ erhalten wir nach (40)

$$\mu_0 * \nu(E) = \int_X \mu_0(Ex^{-1})\, d\nu(x) = \int_X \mu_0(x^{-1}E)\, d\nu(x) = \nu * \mu_0(E)$$

und damit die Behauptung.

Es sei $\mathfrak{Y}$ das System aller Normalteiler von X (im Falle einer Abelschen Gruppe also das System aller Untergruppen von X). Wir führen in $\mathfrak{Y}$ eine Multiplikation ein, indem wir zwei Normalteilern N_1 und N_2 als Produkt den Normalteiler $N_1 N_2$ zuordnen. Nach Hilfssatz 7 gilt

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z} = \{\mu_\varrho \in \mathfrak{X} : T(\mu_\varrho) \in \mathfrak{Y}\}.$$

Satz 12. *Die durch $T(\mu_\varrho) = N_\varrho$ definierte Abbildung von $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{Y}$ ist ein (algebraischer) Isomorphismus der kompakten Hausdorffschen Halbgruppe $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ auf die Halbgruppe $\mathfrak{Y}$. Durch Übernahme der Topologie von $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ wird $\mathfrak{Y}$ selbst zu einer kompakten Hausdorffschen Halbgruppe.*

Beweis: Die Eineindeutigkeit der Abbildung folgt aus Hilfssatz 7 und der Eindeutigkeit des Haarschen Maßes. Die Isomorphie-Eigenschaft folgt aus Satz 5'. Wir haben nur noch zu zeigen, daß der Unterraum $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{B}$ abgeschlossen ist, d. h. daß jedes konvergente Netz $\mathfrak{N} = \{\mu_\varrho\}$ in $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ gegen ein Maß in $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$ konvergiert. Es sei $\nu = \lim \mu_\varrho$. Aus der Stetigkeit des $*$-Produktes folgt

$$\nu * \nu = \Big(\lim_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho\Big) * \Big(\lim_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho\Big) = \lim_{\mathfrak{N}} (\mu_\varrho * \mu_\varrho) = \lim_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho = \nu,$$

und für ein beliebiges Maß $\nu_1 \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} \nu_1 * \nu &= \nu_1 * \Big(\lim_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho\Big) = \lim_{\mathfrak{N}} (\nu_1 * \mu_\varrho) = \lim_{\mathfrak{N}} (\mu_\varrho * \nu_1) \\ &= \Big(\lim_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho\Big) * \nu_1 = \nu * \nu_1, \end{aligned}$$

also erhalten wir $\nu \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}$. Die abschließende Feststellung von Satz 12 ist dann klar.

Wir können die Topologie für $\mathfrak{Y}$ aber auch ohne Bezugnahme auf die Topologie in $\mathfrak{B}$ beschreiben. Es sei $\mathfrak{N} = \{N_\varrho : \varrho \in R\}$ ein Netz in $\mathfrak{Y}$. Die leere Menge bezeichnen wir mit 0. Mit $K_{\mathfrak{N}}$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte $x \in X$ mit folgender Eigenschaft: für jede Umgebung U von x gibt es einen Index $\varrho(U) \in R$ derart, daß $N_\varrho \cap U \neq 0$ für alle $\varrho > \varrho(U)$ gilt. Mit $H_{\mathfrak{N}}$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte $x \in X$ mit folgender Eigenschaft: für jede Umgebung U von x und jeden Index $\bar{\varrho} \in R$ gibt es einen Index $\varrho > \bar{\varrho}$ derart, daß $N_\varrho \cap U \neq 0$ ist. Offenbar gilt $K_{\mathfrak{N}} \subset H_{\mathfrak{N}}$.

Hilfssatz 8. *Es sei $\mathfrak{N}' = \{N_\sigma : \sigma \in S\}$ ein Unternetz des Netzes $\mathfrak{N} = \{N_\varrho : \varrho \in R\}$ in $\mathfrak{Y}$. Dann gilt $K_{\mathfrak{N}} \subset K_{\mathfrak{N}'} \subset H_{\mathfrak{N}'} \subset H_{\mathfrak{N}}$.*

Beweis: Es sei $x \in K_{\mathfrak{N}}$, sowie U eine Umgebung von x und $N_\varrho \cap U \neq 0$ für alle $\varrho > \varrho(U)$. Zu $\varrho(U)$ bestimmen wir nach (24) einen Index $\sigma(U) \in S$ derart, daß $N_\sigma > N_{\varrho(U)}$ gilt, wenn $\sigma > \sigma(U)$ ist. Für alle solchen Indizes $\sigma \in S$ gilt $N_\sigma \cap U \neq 0$. Also gilt $x \in K_{\mathfrak{N}'}$ und $K_{\mathfrak{N}} \subset K_{\mathfrak{N}'}$.

Es sei nun $x \in H_{\mathfrak{N}'}$ sowie U eine Umgebung von x und $\bar{\varrho} \in R$ willkürlich gegeben. Wir bestimmen wieder einen Index $\bar{\sigma} \in S$ derart, daß $N_\sigma > N_{\bar{\varrho}}$ für alle $\sigma > \bar{\sigma}$ gilt. Nach Voraussetzung existiert ein Index $\sigma > \bar{\sigma}$ derart, daß $N_\sigma \cap U \neq 0$ ist. Da N_σ im Netz $\mathfrak{N}$ mit einem Index größer als $\bar{\varrho}$ vorkommt, folgt $x \in H_{\mathfrak{N}}$ und weiter $H_{\mathfrak{N}'} \subset H_{\mathfrak{N}}$.

Hilfssatz 9. *Es sei $\mathfrak{N} = \{N_\varrho : \varrho \in R\}$ ein konvergentes Netz in $\mathfrak{Y}$. Dann ist $K_{\mathfrak{N}} = H_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{Y}$ und $K_{\mathfrak{N}} = \lim\limits_{\mathfrak{N}} N_\varrho$.*

Beweis: Es sei $x \in N_0 = \lim\limits_{\mathfrak{N}} N_\varrho$, sowie U eine Umgebung von x und $f \in \mathfrak{C}(X)$ eine zugehörige Umgebungsfunktion. Dann ist $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho(f) = \mu_0(f) > 0$, also $\mu_\varrho(f) > 0$ für alle $\varrho > \varrho(U)$ und daher $N_\varrho \cap U \neq 0$ für alle $\varrho > \varrho(U)$. Also gilt $K_{\mathfrak{N}} \supset N_0$.

Es sei nun $x \in K_{\mathfrak{N}}$, sowie U eine Umgebung von x und $U_1 \subset U$ eine offene μ_0-Stetigkeitsmenge, die x enthält (s. Hilfssatz 5). Wir wählen eine Umgebung V der Einheit e derart, daß $xV^2 \subset U_1$ ist. Für jeden Index $\varrho > \varrho(V)$ wählen wir ein Element x_ϱ aus dem nach Definition von $K_{\mathfrak{N}}$ nicht leeren Durchschnitt $N_\varrho \cap xV$. Ferner sei $W \subset V$ eine offene μ_0-Stetigkeitsmenge, die e enthält. Dann ist $W \cap N_0$ offen in N_0 und daher $\mu_0(W) > 0$. Aus $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho(W) = \mu_0(W)$ folgt $\mu_\varrho(W) > \frac{1}{2}\mu_0(W)$ für alle $\varrho > \varrho_0$. Es sei $\varrho_1 > \varrho_0$, $\varrho_1 > \varrho(V)$ und $\varrho \in R$. Wegen $x_\varrho \in N_\varrho$ gilt

$$\mu_\varrho(x_\varrho W) = \mu'_\varrho(x_\varrho W \cap N_\varrho) = \mu'_\varrho(W \cap N_\varrho) = \mu_\varrho(W) > \tfrac{1}{2}\mu_0(W) \quad \text{für alle } \varrho > \varrho_1.$$

Wegen $x_\varrho \in xV$ gilt

$$x_\varrho W \subset x_\varrho V \subset xV^2 \subset U_1 \quad \text{für alle } \varrho > \varrho_1.$$

Unter Berücksichtigung dieser Ungleichungen gilt wegen $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \mu_\varrho(U_1) = \mu_0(U_1)$ und $\mu_0(W) > 0$

$$\mu_0(U_1) + \tfrac{1}{2}\mu_0(W) \geqq \mu_\varrho(U_1) \geqq \mu_\varrho(x_\varrho W) > \tfrac{1}{2}\mu_0(W) > 0 \quad \text{für alle } \varrho > \varrho_2 > \varrho_1,$$

also $\mu_0(U_1) > 0$ und wegen $U \supset U_1$ auch $\mu_0(U) > 0$. Da U eine beliebige Umgebung von X war, folgt $x \in T(\mu_0) = N_0$ und weiter $K_{\mathfrak{N}} \subset N_0$. Zusammen mit der Einschließung $K_{\mathfrak{N}} \subset N_0$ ergibt dies $K_{\mathfrak{N}} = \lim\limits_{\mathfrak{N}} N_\varrho$.

Es sei nun U eine Umgebung des Punktes $x \in H_{\mathfrak{N}}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}(U)$ die Menge aller $N \in \mathfrak{Y}$ mit $N \cap U \neq 0$. Nach Definition von $H_{\mathfrak{N}}$ ist $\mathfrak{U}(U)$ nicht leer. Die Familie $\mathfrak{U}$ aller Mengen $\mathfrak{U}(U)$, wobei U ein Umgebungssystem des Punktes x durchläuft, hat die Eigenschaft, daß der Durchschnitt zweier Elemente von $\mathfrak{U}$ wieder ein Element von $\mathfrak{U}$ enthält. Ist nämlich U_3 eine in $U_1 \cap U_2$ enthaltene Umgebung von x, dann ist $\mathfrak{U}(U_3) \subset \mathfrak{U}(U_1) \cap \mathfrak{U}(U_2)$. Für jede Menge $\mathfrak{U}(U) \in \mathfrak{U}$ und jeden Index $\bar{\varrho} \in R$ existiert nach Definition von $H_{\mathfrak{N}}$ ein Index $\varrho > \bar{\varrho}$ derart, daß $N_\varrho \in \mathfrak{U}(U)$ ist. Dann gibt es (s. [9], S. 70) ein Unternetz $\mathfrak{N}' = \{N_\sigma : \sigma \in S\}$ von $\mathfrak{N}$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jeder Menge $\mathfrak{U}(U) \in \mathfrak{U}$ existiert ein Index $\sigma(U)$ derart, daß $N_\sigma \in \mathfrak{U}(U)$ für alle $\sigma > \sigma(U)$ ist. Nach Definition von $\mathfrak{U}(U)$ folgt $x \in K_{\mathfrak{N}'}$. Das Netz $\mathfrak{N}'$ konvergiert nach dem oben Bewiesenen gegen $K_{\mathfrak{N}'}$. Da es Unternetz des gegen $K_{\mathfrak{N}}$ konvergierenden Netzes $\mathfrak{N}$ ist, muß $K_{\mathfrak{N}'} = K_{\mathfrak{N}}$ und damit $x \in K_{\mathfrak{N}}$ gelten. Da x ein beliebiges Element von $H_{\mathfrak{N}}$ war, folgt $K_{\mathfrak{N}} \supset H_{\mathfrak{N}}$ und weiter $K_{\mathfrak{N}} = H_{\mathfrak{N}}$.

Hilfssatz 10. *Es sei $\mathfrak{N} = \{N_\varrho : \varrho \in R\}$ ein Netz in $\mathfrak{Y}$ und $\{N_\tau : \tau \in T\}$ die Menge aller Normalteiler von X, die Häufungspunkte des Netzes $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{Y}$ sind. Dann gilt $K_{\mathfrak{N}} = \bigcap\limits_{\tau \in T} N_\tau$ und $H_{\mathfrak{N}} = \bigcup\limits_{\tau \in T} N_\tau$.*

Beweis: Die Indexmenge T ist nicht leer, da $\mathfrak{Y}$ kompakt ist. Für jeden Index $\tau \in T$ gibt es ein gegen N_τ konvergierendes Unternetz von $\mathfrak{N}$ (s. [9], S. 71). Nach Hilfssatz 9 und Hilfssatz 8 gilt $K_{\mathfrak{N}} < N_\tau < H_{\mathfrak{N}}$ für jeden Index $\tau \in T$, also

$$K_{\mathfrak{N}} < \bigcap_{\tau \in T} N_\tau < \bigcup_{\tau \in T} N_\tau < H_{\mathfrak{N}}.$$

Es sei nun $x \in \bigcap_{\tau \in T} N_\tau$, aber $x \notin K_{\mathfrak{N}}$. Nach Definition von $H_{\mathfrak{N}}$ und $K_{\mathfrak{N}}$ gibt es eine Umgebung U von x mit folgender Eigenschaft: zu jedem Index $\bar{\varrho} \in R$ existieren Indizes $\varrho_1 > \bar{\varrho}$ und $\varrho_2 > \bar{\varrho}$ derart, daß $N_{\varrho_1} \cap U = 0$ und $N_{\varrho_2} \cap U \neq 0$ ist. Die Indizes vom Typ ϱ_1 bilden eine in der ursprünglichen Teilordnung immer noch aufwärts gerichtete Untermenge R_1 von R. Also ist $\mathfrak{N}_1 = \{N_{\varrho_1} : \varrho_1 \in R_1\}$ ein Unternetz von $\mathfrak{N}$, für das nun $x \notin H_{\mathfrak{N}_1}$ gilt. Da $\mathfrak{Y}$ kompakt ist, existiert ein konvergentes Unternetz $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}_1$, das auch Unternetz von $\mathfrak{N}$ ist und gegen einen gewissen Normalteiler $N_\tau (\tau \in T)$ konvergiert. Wegen Hilfssatz 9 und 8 gilt $N_\tau < H_{\mathfrak{N}_1}$, also $x \notin N_\tau$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt $\bigcap_{\tau \in T} N_\tau < K_{\mathfrak{N}}$ und $K_{\mathfrak{N}} = \bigcap_{\tau \in T} N_\tau$.

Es sei nun x ein beliebiges Element von $H_{\mathfrak{N}}$. Im letzten Absatz des Beweises von Hilfssatz 9 wurde gezeigt, daß es ein Unternetz $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$ gibt, für das $x \in K_{\mathfrak{N}'}$ gilt. Es sei $\mathfrak{N}_1$ ein konvergentes Unternetz von $\mathfrak{N}'$. Dann ist $\mathfrak{N}_1$ ein konvergentes Unternetz von $\mathfrak{N}$, also gilt $K_{\mathfrak{N}_1} = N_\tau$ für einen gewissen Index $\tau \in T$. Aus Hilfssatz 8 folgt $x \in K_{\mathfrak{N}'} < K_{\mathfrak{N}_1} = N_\tau$, also $x \in N_\tau$ und $H_{\mathfrak{N}} < \bigcup_{\tau \in T} N_\tau$. Damit ist Hilfssatz 10 bewiesen.

Satz 13. *Es sei $\mathfrak{N} = \{N_\varrho : \varrho \in R\}$ ein Netz in $\mathfrak{Y}$. Das Netz $\mathfrak{N}$ konvergiert dann und nur dann, wenn $H_{\mathfrak{N}} = K_{\mathfrak{N}}$ gilt. Ist dies der Fall, dann ist $H_{\mathfrak{N}} = K_{\mathfrak{N}} = \lim_{\mathfrak{N}} N_\varrho$.*

Beweis: Ist $\mathfrak{N}$ konvergent, dann liefert Hilfssatz 9 die Behauptung. Wenn $\mathfrak{N}$ nicht konvergiert, dann existiert infolge der Kompaktheit von $\mathfrak{Y}$ zumindest ein konvergentes Unternetz $\mathfrak{N}_1 = \{N_{\varrho_1} : \varrho_1 \in R_1\}$ von $\mathfrak{N}$. Es sei $N_1 = \lim_{\mathfrak{N}_1} N_{\varrho_1}$. Da $\mathfrak{N}$ nicht gegen N_1 konvergiert, existiert eine Umgebung $\mathfrak{W}$ von N_1 (im Sinne der Topologie in $\mathfrak{Y}$) mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem Index $\bar{\varrho} \in R$ existiert ein Index $\varrho' \in R$, $\varrho' > \bar{\varrho}$ derart, daß $N_{\varrho'} \in \mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{W}$ ist. Die Indizes vom Typ ϱ' bilden eine in der ursprünglichen Teilordnung von R immer noch aufwärts gerichtete Untermenge R' von R. Also ist $\mathfrak{N}' = \{N_{\varrho'} : \varrho' \in R'\}$ ein Unternetz von $\mathfrak{N}$ im abgeschlossenen und daher kompakten Raum $\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{W}$. Es existiert daher ein konvergentes Unternetz $\mathfrak{N}_2 = \{N_{\varrho_2} : \varrho_2 \in R_2\}$ von $\mathfrak{N}'$, das auch Unternetz von $\mathfrak{N}$ ist und gegen N_2 konvergieren möge. Wegen $N_1 \in \mathfrak{W}$, $N_2 \in \mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{W}$ ist $N_1 \neq N_2$ und um so mehr $N_1 \cap N_2 \neq N_1 \cup N_2$. Nach Hilfssatz 10 ist $K_{\mathfrak{N}} < N_1 \cap N_2 < N_1 \cup N_2 < H_{\mathfrak{N}}$, also $H_{\mathfrak{N}} \neq K_{\mathfrak{N}}$.

Wir führen zur Illustration wieder ein Beispiel an. Es sei X wie in § 4 das direkte Produkt von abzählbar unendlich vielen zyklischen Untergruppen $X_i (i = 1, 2, \ldots)$ der Ordnung zwei. Es sei $X_i = N_i$ die durch das Element $\bar{x}_i (\bar{x}_{ii} = -1, \bar{x}_{ij} = 1$ für $j \neq i)$ erzeugte Untergruppe von X. Wir fragen nach der Konvergenz des Netzes $\mathfrak{N} = \{X_i : i = 1, 2, \ldots\}$ in $\mathfrak{Y}$. Ist $x_0 = \{x_{0j}\}$ irgendein von e verschiedenes Element von X und etwa $x_{0k} = -1$, dann ist $U = \{y \in X : y_k = -1\}$ eine Umgebung von x_0 und $X_i \cap U = 0$ für $i > k$. Also ist $H_{\mathfrak{N}} = K_{\mathfrak{N}} = \{e\}$ und $\mathfrak{N}$ konvergiert gegen $\{e\}$. Für $f \in \mathfrak{C}(X)$ ist $\mu_i(f) = \frac{1}{2}\{f(\bar{x}_i) + f(e)\}$. Wegen $\lim_{\mathfrak{N}} X_i = \{e\}$ gilt $\lim_{\mathfrak{N}} \mu_i(f) = f(e)$ oder $\lim_{i \to \infty} f(\bar{x}_i) = f(e)$. Auf ähnliche Weise erhält man

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{i=k}^{\infty} X_i = \{e\}$$

und daraus weiter nach (37)

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{1\leq p_i\leq 2} f(\bar{x}_k^{p_k}\cdots\bar{x}_{k+n}^{p_{k+n}}) = f(e).$$

Andererseits folgt aus (37)

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} X_i = X.$$

Die Spezialisierung von Satz 7 auf eine kompakte Gruppe führt auf den Begriff des Quotientenmaßes auf dem kompakten Hausdorffschen Raum $X'' = X/X_1$ der Rechtsrestklassen der Untergruppe X_1 in X (s. [10], § 33). Unter der Annahme, daß für die Rechtsrestklassen von X_1 in X ein Querschnitt existiert, d. h. eine Auswahlfunktion q, die ein Homöomorphismus von X'' auf eine Untermenge $q(X'')$ von X in der relativierten Topologie ist, läßt sich folgende Zerlegung des Haarschen Maßes μ durchführen:

Satz 14. *Es sei X_1 eine echte Untergruppe von X und für den zugehörigen Rechtsrestklassenraum $X' = X/X_1$ existiere ein Querschnitt q in X. Dann existiert ein von μ verschiedenes Maß $\nu_q \in \mathfrak{B}$ mit dem Träger $Q = q(X')$ derart, daß $\mu = \mu_1 * \nu_q$ gilt.*

Beweis: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}'$ die Familie der Borelmengen von X' und können nach unserer Voraussetzung X' mit $Q = q(X')$ in der relativierten Topologie identifizieren. Die Menge Q ist als homöomorphes Bild von X' kompakt, also gilt $Q \in \mathfrak{B}$. Für $f \in \mathfrak{C}(X)$ gilt

$$\int_{X_1} f(x_1 x)\, d\mu_1'(x_1) = \int_X f(x_1 x)\, d\mu_1(x_1) \in \mathfrak{C}(Q).$$

Nach Satz 7 läßt sich auf Q ein Verteilungsmaß ν_q' definieren, so daß

$$\mu(f) = \int_Q\int_X f(x_1 x)\, d\mu_1(x_1)\, d\nu_q'(x) \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{C}(X)$$

gilt. Für jede Menge $E \in \mathfrak{B}$ ist $E \cap Q$ in $\mathfrak{B}'$ enthalten. Setzen wir $\nu_q(E) = \nu_q'(E \cap Q)$, so erhalten wir ein Verteilungsmaß ν_q auf X, für das

$$\mu(f) = \int_X\int_X f(x_1 x)\, d\mu_1(x_1)\, d\nu_q(x) = \mu_1 * \nu_q(f) \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{C}(X)$$

gilt. Die Untergruppe X_1 enthält jedenfalls ein Element $x \notin Q$. Die Menge Q ist kompakt, also abgeschlossen in X. Es sei U eine zu Q fremde Umgebung von x. Dann ist $\nu_q(U) = 0$, aber $\mu(U) > 0$, also $\nu_q \neq \mu$.

Ein Beispiel hierzu liefert die in § 3 angeführte Diedergruppe des Kreises. Wir brauchen dazu bloß die Untergruppe X_2 durch ein beliebiges Elementpaar $Q = \{x_1, x_2'\}$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2' \in X_1'$ zu ersetzen.

Wie bereits bemerkt, können die den Resultaten von § 3 und § 4 entsprechenden Sätze in kompakten Hausdorffschen Gruppen teilweise leicht direkt erhalten werden, wenn wir die am Anfang dieses Paragraphen angegebenen Ergebnisse zum Beweise heranziehen. Es können natürlich auch die Sätze der vorangegangenen Paragraphen auf diesem Wege erhalten werden. Hierbei müssen wir nur beachten, daß jeder volle Modul in $\mathfrak{F}$ im wesentlichen mit der Algebra aller stetigen Funktionen auf einer kompakten Gruppe identisch ist (s. Satz 1). Der Mittelwert einer fp. Funktion ist dabei das Haar-Integral der zugehörigen stetigen Funktion.

§ 6. Beziehungen zur Theorie der Gleichverteilung.

Seit seiner Einführung in der klassischen Arbeit von H. Weyl (s. [15]) hat der Begriff der Gleichverteilung verschiedene Abänderungen und Verallgemeinerungen erfahren. Diese lassen sich jedoch, soweit sie dem Verfasser bekannt sind, gleichzeitig mit den Ergebnissen der vorangegangenen Paragraphen durch die folgenden zwei Definitionen erfassen. Unter der Norm in einem Raum beschränkter komplexwertiger Funktionen wollen wir dabei stets die in § 1 eingeführte Norm verstehen.

Definition 1. *Es seien X_1 und X_2 beliebige Mengen, sowie $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ normierte lineare Räume beschränkter komplexwertiger Funktionen auf X_1 bzw. X_2 und Φ_1 bzw. Φ_2 beschränkte lineare Funktionale auf $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$. Eine Abbildung φ von X_2 in X_1 heiße eine $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_2, \Phi_2)$-Gleichverteilung von X_2 in X_1, wenn $f \circ \varphi \in \mathfrak{M}_2$ und $\Phi_1(f) = \Phi_2(f \circ \varphi)$ für alle $f \in \mathfrak{M}_1$ gilt.*

Definition 2. *Es seien X_1 und X_2 beliebige Mengen und $\{X_\tau : \tau \in T\}$ ein Netz von Untermengen von X_2. Es sei $\mathfrak{M}_1$ ein normierter linearer Raum beschränkter komplexwertiger Funktionen auf X_1 und Φ_1 ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathfrak{M}_1$. Analog seien $\mathfrak{M}_\tau$ und Φ_τ für X_τ für alle $\tau \in T$ definiert. Die Funktionale Φ_τ seien gleichgradig beschränkt ($\| \Phi_\tau \| \leqq \varkappa$ für alle $\tau \in T$). Ein Netz $\mathfrak{N} = \{\varphi_\tau : \tau \in T\}$ von Abbildungen von X_τ in X_1 heiße eine asymptotische $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_\tau, \Phi_\tau)$-Gleichverteilung von X_2 in X_1, wenn $f \circ \varphi_\tau \in \mathfrak{M}_\tau$ (für alle $\tau \in T$) und $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau) = \Phi_1(f)$ für alle $f \in \Phi_1$ gilt.*

Bereits in [15] werden von H. Weyl verschiedene Fälle behandelt:

1) Es ist X_1 das p-dimensionale Toroid R_p, sowie $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{C}(R_p)$ und Φ_1 das Haarsche Maß μ auf X_1. Ferner ist $X_2 = P$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathfrak{M}_2$ (z. B.) die Menge $\mathfrak{L}$ aller beschränkten (komplexwertigen) Funktionen f auf P, für die der Grenzwert $\Lambda(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(i)$ existiert, und $\Phi_2 = \Lambda$. Eine Folge $\{x_i : i = 1, 2, \ldots\}$ in R_p kann als eine Abbildung φ von P in R_p aufgefaßt werden: $\varphi(i) = x_i \in R_p$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Eine in R_p gleichverteilte Folge ist dann in der Formulierung von Definition 1 eine $(\mathfrak{C}(R_p), \mu; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilung von P in R_p.

2) Es ist X_1 ein endliches System von Restklassen einer r-dimensionalen Untergruppe im Toroid R_p, sowie $\mathfrak{M}_1$ die Beschränkung von $\mathfrak{C}(R_p)$ auf X_1 und Φ_1 das entsprechende arithmetische Mittel des auf die verschiedenen Restklassen übertragenen Haarschen Maßes der Untergruppe. X_2, $\mathfrak{M}_2$, und Φ_2 sowie φ haben die gleiche Bedeutung wie in 1).

3) Es sind X_1, $\mathfrak{M}_1$ und Φ_1 gegeben wie in 1). X_2 ist die Menge G_2 der Gitterpunkte eines zweidimensionalen euklidischen Raumes E_2 und $\mathfrak{M}_2$ (z. B.) die Menge aller beschränkten Funktionen auf X_2, für die ein ähnlich wie in 1) gebildeter Grenzwert existiert, der dann auf $\mathfrak{M}_2$ ein lineares beschränktes Funktional definiert. Die Abbildung φ ist hier eine auf Gitterpunkten definierte Funktion mit Werten in R_p.

4) Es sind X_1, $\mathfrak{M}_1$ und Φ_1 gegeben wie in 1). X_2 ist die positive reelle Zahlengerade R_+ und $\mathfrak{M}_2$ (z. B.) der Raum aller beschränkten stetigen Funktionen f auf R_+, für die der Grenzwert $\Phi_2(f) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)\, dt$ existiert. Die Abbildung φ ist in diesem Falle eine Funktion auf R_+ mit Werten in R_p.

Die eben angeführten Fälle lassen sich auch im Sinne von Definition 2 auffassen. Beispielsweise kann in 1)

$$X_\tau = \{1, \ldots, \tau\} \ (\tau \in P), \qquad \mathfrak{M}_\tau = \mathfrak{C}(X_\tau) \text{ und } \Phi_\tau(f) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} f(i) \ \ (f \in \mathfrak{C}(X_\tau))$$

gesetzt werden. Definieren wir φ_τ durch $\varphi_\tau(i) = x_i$ $(i = 1, \ldots, \tau)$, dann ist die Folge $\{\varphi_\tau : \tau = 1, 2, \ldots\}$ eine asymptotische $(\mathfrak{C}(R_p), \mu; \mathfrak{C}(X_\tau), \Phi_\tau)$-Gleichverteilung von P in R_p. Deutlicher wird dies im Fall 3), wenn Weyl zur Bildung eines Mittelwertes die Menge der Gitterpunkte betrachtet, die in einem endlichen Flächenstück τK liegen, das durch zentrische Streckung aus einem endlichen Flächenstück K hervorgegangen ist ($X_\tau = G_2 \cap \tau K$, $\tau > 0$ reell). Die Abbildungen φ_τ unterscheiden sich hier nur durch ihren Definitionsbereich X_τ. J. G. van der Corput untersucht folgende asymptotischen $(\mathfrak{C}(R_p), \mu; \mathfrak{M}_\tau, \Phi_\tau)$-Gleichverteilungen von G_n in R_p (s. z. B. [1]): $\{X_\tau : \tau = 1, 2, \ldots\}$ ist eine Folge von unbeschränkt wachsenden Quadern in G_n, ferner ist $\mathfrak{M}_\tau = \mathfrak{C}(X_\tau)$ und Φ_τ das arithmetische Mittel der Funktionswerte auf X_τ^1. Als Abbildung φ_τ ist dabei eine von τ abhängige Abbildung von X_τ in R_p zugelassen. L. Kuipers und B. Meulenbeld variieren dies durch andere Wahl von X_2 und X_τ (s. z. B. [9]) oder durch andere Wahl der Funktionale Φ_2 und Φ_τ (s. z. B. [8]).

B. Eckmann betrachtet $(\mathfrak{C}(X), \mu; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilungen von P in eine kompakte Hausdorffsche Gruppe X (s. [2]). E. Hlawka läßt unter anderem für $\mathfrak{M}_1$ auch die Algebra $\mathfrak{F}$ der fp. Funktionen auf einer abstrakten Gruppe X zu (s. [4]) und untersucht darüber hinaus folgende $(\mathfrak{C}(X), \Phi_1; \mathfrak{M}_2, \Phi_2)$-Gleichverteilungen von P in einen kompakten Hausdorffschen Raum X (s. [5]): es ist Φ_1 ein beliebiges Radonsches Maß auf X und $\mathfrak{M}_2$ (z. B.) der Raum aller beschränkten Funktionen auf P, für die ein durch eine unendliche Summierungs-Matrix A bestimmtes beschränktes lineares Funktional Φ_2 definiert ist. Fassen wir jede Zeile A_τ $(\tau = 1, 2, \ldots)$ als ein auf einem bestimmten Funktionenraum $\mathfrak{M}_\tau$ definiertes beschränktes lineares Funktional auf und setzen wir $X_\tau = P$ $(\tau = 1, 2, \ldots)$, dann handelt es sich hier wieder um eine asymptotische $(\mathfrak{C}(X), \Phi_1; \mathfrak{M}_\tau, A_\tau)$-Gleichverteilung von P in X.

Wir verwenden im folgenden die in den vorangegangenen Paragraphen eingeführten Bezeichnungen unter Beibehaltung ihrer Bedeutungen. Außerdem sei $\mathfrak{F}_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}$ die Algebra aller fp. Funktionen auf dem direkten Produkt $\bigotimes_{i=1}^{n} X_{\varrho_i}$ der Untergruppen X_{ϱ_i} $(i = 1, \ldots, n)$ von X und $\varphi_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}$ die durch

$$\varphi_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}(x_{\varrho_1}, \ldots, x_{\varrho_n}) = x_{\varrho_1} \cdots x_{\varrho_n}$$

definierte Abbildung des direkten Produktes $\bigotimes_{i=1}^{n} X_{\varrho_i}$ in X. Die Fragestellungen von § 3 und § 4 lassen sich dann folgendermaßen beschreiben: Unter welchen Umständen ist $\varphi_{1, \ldots, n}$ eine $(\mathfrak{M}, M_0; \mathfrak{F}_{1, \ldots, n}, M_{1, \ldots, n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ in X? Unter welchen Umständen ist das Netz $\{\varphi_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ eine asymptotische $(\mathfrak{M}, M_0; \mathfrak{F}_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}, M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{\varrho \in R} X_\varrho$ in X? Die erhaltenen Sätze lassen sich also als Gleichverteilungssätze formulieren.

Die oben gegebenen Definitionen sind noch erweiterungsfähig. Es soll jedoch hier die Theorie der Gleichverteilung nur in dem Maße behandelt werden, als es dazu dienen

kann, Ergebnisse der vorangegangenen Paragraphen mit anderen, bereits vorliegenden in einen gemeinsamen Rahmen einzufügen. Wir formulieren deshalb noch das Weylsche Kriterium, das auch für Gleichverteilungen im Sinne der Definitionen 1 und 2 gültig ist. Wir bezeichnen nach E. Hlawka (s. [5]) eine Untermenge $\mathfrak{H}$ des normierten linearen Raumes $\mathfrak{M}$ als ein Hauptsystem, wenn der von $\mathfrak{H}$ aufgespannte lineare Raum in $\mathfrak{M}$ dicht ist (es sei hierbei auch eine überabzählbare Menge $\mathfrak{H}$ zugelassen). Wir betrachten gleich den Fall einer asymptotischen $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_\tau, \Phi_\tau)$-Gleichverteilung $\{\varphi_\tau : \tau \in T\}$ einer Menge X_2 in eine Menge X_1, aus dem der Fall einer $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_2, \Phi_2)$-Gleichverteilung φ von X_2 in X_1 durch Spezialisierung $\tau = 2$ hervorgeht. In der Formulierung und Beweismethode folgen wir der zitierten Arbeit von E. Hlawka.

Weylsches Kriterium. *Es seien X_1, X_2, X_τ $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_\tau$, Φ_1, Φ_τ gegeben wie in Definition 2 und die Räume $\mathfrak{M}_\tau (\tau \in T)$ als vollständig vorausgesetzt. Ferner sei $\mathfrak{N} = \{\varphi_\tau : \tau \in T\}$ ein Netz von Abbildungen von X_τ in X_1. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) *Ist $h \circ \varphi_\tau \in \mathfrak{M}_\tau$ für alle Funktionen h aus einem Hauptsystem $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{M}_1$ und für alle $\tau \in T$, und existiert für alle solchen Funktionen h der Grenzwert $\Phi(h) = \lim\limits_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(h \circ \varphi_\tau)$, dann gilt $f \circ \varphi_\tau \in \mathfrak{M}_\tau$ auch für jede beliebige Funktion $f \in \mathfrak{M}_1$ und alle $\tau \in T$, der Grenzwert $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau)$ existiert für alle Funktionen $f \in \mathfrak{M}_1$ und definiert auf $\mathfrak{M}_1$ ein beschränktes lineares Funktional Φ.*

b) *Es ist $\mathfrak{N}$ dann und nur dann eine asymptotische $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_\tau, \Phi_\tau)$-Gleichverteilung von X_2 in X_1, wenn für alle Funktionen h aus einem Hauptsystem $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{M}_1$ sowohl $h \circ \varphi_\tau \in \mathfrak{M}_\tau$ für alle $\tau \in T$ als auch $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(h \circ \varphi_\tau) = \Phi_1(h)$ gilt.*

Beweis: a) Es sei $f \in \mathfrak{M}_1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben und g eine endliche komplexe Linearkombination von Elementen aus $\mathfrak{H}$ derart, daß $\| f - g \| < \varepsilon$ gilt. Nach Voraussetzung ist $g \circ \varphi_\tau$ für jeden Index $\tau \in T$ in $\mathfrak{M}_\tau$ enthalten und es existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(g \circ \varphi_\tau) = \Phi_1(g)$. Also gilt

$$|\Phi_\tau(g \circ \varphi_\tau) - \Phi_{\tau'}(g \circ \varphi_{\tau'})| < \varepsilon \quad \text{für alle } \tau, \tau' > \tau_1.$$

Wegen $\| f \circ \varphi_\tau - g \circ \varphi_\tau \| < \varepsilon$ und der Vollständigkeit von $\mathfrak{M}_\tau$ ist $f \circ \varphi_\tau$ in $\mathfrak{M}_\tau$ enthalten. Ferner gilt

$$\begin{aligned} |\Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau) - \Phi_{\tau'}(f \circ \varphi_{\tau'})| &\leqq |\Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau) - \Phi_\tau(g \circ \varphi_\tau)| + |\Phi_\tau(g \circ \varphi_\tau) - \Phi_{\tau'}(g \circ \varphi_{\tau'})| \\ &\quad + |\Phi_{\tau'}(g \circ \varphi_{\tau'}) - \Phi_{\tau'}(f \circ \varphi_{\tau'})| \\ &< \varepsilon(2\varkappa + 1) \quad \text{für alle } \tau, \tau' > \tau_1. \end{aligned}$$

Also existiert auch der Grenzwert $\Phi(f) = \lim\limits_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau)$. Für beliebige Funktionen f und g aus $\mathfrak{M}_1$ und beliebige komplexe Zahlen α, β erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta g) &= \lim_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(\alpha f + \beta g) \circ \varphi_\tau \\ &= \lim_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(\alpha f \circ \varphi_\tau + \beta g \circ \varphi_\tau) \\ &= \alpha \lim_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau) + \beta \lim_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(g \circ \varphi_\tau) \\ &= \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\Phi(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} \lim_{\mathfrak{N}} |\Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau)|$$
$$\leqq \sup_{\tau \in T} \sup_{\|f\| \leq 1} |\Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau)| \leqq \sup_{\tau \in T} \|\Phi_\tau\| \leqq \varkappa.$$

Also ist Φ ein beschränktes lineares Funktional.

b) Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Die angegebene Bedingung ist aber auch hinreichend, da aus ihr nach a) folgt, daß für alle $f \in \mathfrak{M}_1$ der Grenzwert $\lim_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau(f \circ \varphi_\tau)$ existiert und auf dem von $\mathfrak{H}$ aufgespannten linearen Raum mit Φ_1 übereinstimmt, nach Hilfssatz 1 also auch auf dem ganzen Raum $\mathfrak{M}_1$.

Die Voraussetzung der Vollständigkeit der Räume $\mathfrak{M}_\tau$ bedeutet nach Hilfssatz 1 keine Einschränkung der Anwendbarkeit des Kriteriums. Aus dem Weylschen Kriterium folgt dann, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch $\mathfrak{M}_1$ als vollständig annehmen können, da ein Hauptsystem von $\mathfrak{M}_1$ auch ein Hauptsystem der Vervollständigung von $\mathfrak{M}_1$ ist und das Funktional Φ_1 nach Hilfssatz 1 eindeutig auf die Vervollständigung von $\mathfrak{M}_1$ fortgesetzt werden kann.

Offenbar sind die Sätze 2 und 8 Spezialisierungen des Weylschen Kriteriums. Als weitere Anwendung beweisen wir mittels des Weylschen Kriteriums einen Gleichverteilungssatz von W. Maak (s. [12]). Dieser Satz stellt insofern ein Gegenstück zu den Gleichverteilungssätzen der vorliegenden Arbeit dar, als es sich bei ihm um eine Gleichverteilung einer Gruppe X in das direkte Produkt $X \otimes X$ handelt. Wir formulieren gleich eine etwas erweiterte und verschärfte Fassung.

Wir schreiben vorübergehend die Funktionen auf dem direkten Produkt $X \otimes X$ mit den Argumenten, also $f(x, y)$ statt f. Ist $\mathfrak{A}(x, y)$ eine Menge von Funktionen auf $X \otimes X$, so soll $\mathfrak{A}(y, x)$ die Menge aller Funktionen $f(y, x)$ bedeuten, für die $f(x, y)$ in $\mathfrak{A}(x, y)$ liegt. Hierbei bedeutet $f(y, x)$ jene Funktion auf $X \otimes X$, die an der Stelle (x_1, y_1) den Wert $f(y_1, x_1)$ annimmt. Analog seien $\mathfrak{A}(x^{-1}, y^{-1})$, $\mathfrak{A}(x, y^{-1})$ usw. definiert. Eine Funktion $f(x, y)$ heiße symmetrisch, wenn $f(x_1, y_1) = f(y_1, x_1)$ für alle $(x_1, y_1) \in X \otimes X$ gilt, und schiefsymmetrisch, wenn $f(x_1, y_1) = f(y_1^{-1}, x_1^{-1})$ für alle $(x_1, y_1) \in X \otimes X$ gilt. Es sei $\mathfrak{F}(x, y)$ die Menge aller fp. Funktionen auf $X \otimes X$ und $M_{x,y}$ der zugehörige Mittelwert, sowie M_x der Mittelwert auf $\mathfrak{F}(x)$.

Satz 15. *Es sei $\mathfrak{A}(x, y)$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}(x, y)$ und die Abbildung φ von X in $X \otimes X$ durch $\varphi(x) = (x, x)$ für alle $x \in X$ definiert. Es ist φ dann und nur dann eine $(\mathfrak{A}(x, y), M_{x,y}; \mathfrak{F}(x), M_x)$-Gleichverteilung von X in $X \otimes X$, wenn* (a) *die Menge $\mathfrak{A}'(x, y) = \mathfrak{A}(x, y) \cap \mathfrak{A}(y, x)$ nur aus symmetrischen Funktionen besteht, unter denen* (b) *keine (eindimensionale) reelle nicht konstante Darstellung von $X \otimes X$ vorkommt. Wenn X keinen Normalteiler vom Index 2 besitzt, fällt die Zusatzbedingung* (b) *weg.*

Beweis: Entsprechend § 2, (7) gelte

$$\mathfrak{A}(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda') \in L_1} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda')}(y).$$

Aus der algebraischen Charakterisierung eines vollen Moduls erkennen wir, daß mit $\mathfrak{A}(x, y)$ auch $\mathfrak{A}(y, x)$ und daher auch $\mathfrak{A}'(x, y)$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}(x, y)$ ist. Es gelte

$$\mathfrak{A}'(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda') \in L_2} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda')}(y).$$

Es seien nun die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Wir zeigen zunächst, daß für alle $(\lambda, \lambda') \in L_2$ die Darstellungen $D^{(\lambda)}(x)$ und $D^{(\lambda')}(y)$ eindimensional sind. Wäre nämlich etwa $s_\lambda > 1$, so wäre $d_{ik}^{(\lambda)}(x)\, d_{11}^{(\lambda')}(y)$ in $\mathfrak{A}'(x, y)$ enthalten, also

$$d_{ik}^{(\lambda)}(x)\, d_{11}^{(\lambda')}(y) = d_{11}^{(\lambda')}(x)\, d_{ik}^{(\lambda)}(y) \quad \text{für alle } (x, y) \in X \otimes X.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Koeffizienten irreduzibler Darstellungen folgt daraus $\lambda = \lambda'$ und $d_{ik}^{(\lambda)}(x) = d_{11}^{(\lambda)}(x)$. Dann wäre aber $D^{(\lambda)}(x)$ singulär, was einen Widerspruch ergibt. Gleichzeitig sehen wir, daß

$$\mathfrak{A}'(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda) \in L_2} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda)}(y)$$

gilt. Wäre $\lambda = \bar{\lambda}$ für $(\lambda, \lambda) \in L_2$, aber $\lambda \neq 1$, so wäre $D^{(\lambda)}$ reell nicht konstant, also $D^{(\lambda)}(x)\, D^{(\lambda)}(y)$ eine reelle nicht konstante in $\mathfrak{A}'(x, y)$ enthaltene eindimensionale Darstellung von $X \otimes X$, was ausgeschlossen ist. Es gilt also $\lambda \neq \bar{\lambda}$ für alle von $(1, 1)$ verschiedenen $(\lambda, \lambda) \in L_2$. Wir behaupten, daß auch für alle von $(1, 1)$ verschiedenen $(\lambda, \lambda') \in L_1$ die Ungleichung $\lambda' \neq \bar{\lambda}$ zutrifft. Gilt nämlich $\lambda' = \bar{\lambda}$ für ein Indexpaar $(\lambda, \lambda') \in L_1$, so enthält der volle Modul $\mathfrak{A}(x, y)$ in $\mathfrak{F}(x, y)$ zusammen mit dem Modul $\mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\bar{\lambda})}(y)$ auch den Modul $\mathfrak{D}^{(\bar{\lambda})}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda)}(y)$, also ist der Modul $\mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\bar{\lambda})}(y)$ in $\mathfrak{A}'(x, y)$ enthalten und nach dem eben Bewiesenen $\lambda = \bar{\lambda} = 1$.

Die Koeffizienten des Moduls $\{D^{(\lambda)}(x) \otimes D^{(\lambda')}(y) \colon (\lambda, \lambda') \in L_1\}$ irreduzibler Darstellungen bilden ein Hauptsystem von $\mathfrak{A}(x, y)$. Nach dem Weylschen Kriterium brauchen wir nur zu zeigen:

$$(41) \qquad M_{x,y}(d_{ik}^{(\lambda)}(x)\, d_{jl}^{(\lambda')}(y)) = M_x(d_{ik}^{(\lambda)}(x)\, d_{jl}^{(\lambda')}(x)) \quad \text{für alle } (\lambda, \lambda') \in L_1.$$

Dies ist für $(\lambda, \lambda') = (1, 1)$ automatisch erfüllt. Für $(\lambda, \lambda') \neq (1, 1)$ erhalten wir wegen (5) und $\lambda' \neq \bar{\lambda}$ auf beiden Seiten Null, w. z. b. w.

Nehmen wir nun an, die Abbildung φ sei eine $(\mathfrak{A}(x, y), M_{x,y}; \mathfrak{F}(x), M_x)$-Gleichverteilung von X in $X \otimes X$. Dann muß wieder (41) gelten. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn aus $(\lambda, \lambda') \in L_1$ und $(\lambda, \lambda') \neq (1, 1)$ die Ungleichung $\lambda' \neq \bar{\lambda}$ folgt, da sonst $M_{x,y}(d_{11}^{(\lambda)}(x)\, d_{11}^{(\bar{\lambda})}(y)) = 0$, aber $M_x(d_{11}^{(\lambda)}(x)\, d_{11}^{(\bar{\lambda})}(x)) = \dfrac{1}{s_\lambda}$ wäre. Insbesondere muß das für $(\lambda, \lambda') \in L_2$ gelten, da $\mathfrak{A}'(x, y)$ in $\mathfrak{A}(x, y)$ enthalten ist.

Wir zeigen wieder, daß dann für $(\lambda, \lambda') \in L_2$ die Gleichungen $\lambda' = \lambda$ und $s_\lambda = 1$ gelten. Mit dem Modul $\mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda')}(y)$ ist nämlich auch der Modul $\mathfrak{D}^{(\bar{\lambda}')}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\bar{\lambda})}(y)$ in $\mathfrak{A}'(x, y)$ enthalten und ebenso jeder Koeffizient des Kroneckerproduktes $[D^{(\lambda)}(x) \otimes D^{(\bar{\lambda}')}(x)] \otimes [D^{(\bar{\lambda})}(y) \otimes D^{(\lambda')}(y)]$. Wir denken uns $D^{(\lambda)}(x) \otimes D^{(\bar{\lambda}')}(x)$ ausreduziert. Enthält dieses Kroneckerprodukt eine irreduzible Darstellung $D^{(\lambda'')}(x)$, so ist $\mathfrak{D}^{(\lambda'')}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\bar{\lambda}'')}(y)$ in $\mathfrak{A}'(x, y)$ enthalten und daher $\lambda'' = 1$. Es enthält daher $D^{(\lambda)}(x) \otimes D^{(\bar{\lambda}')}(x)$ nur triviale Darstellungen von X. Infolgedessen ist $\lambda' = \lambda$ und, wenn wir den Charakter von $D^{(\lambda)}(x)$ mit $\chi^{(\lambda)}(x)$ bezeichnen, $\chi^{(\lambda)}(x) \cdot \chi^{(\bar{\lambda})}(x) = s_\lambda^2$. Daraus folgt

$$s_\lambda^2 = M_x\left(\sum_{i,k=1}^{s_\lambda} d_{ii}^{(\lambda)}(x)\, d_{kk}^{(\bar{\lambda})}(x)\right) = \sum_{i=1}^{s_\lambda} M_x(d_{ii}^{(\lambda)}(x)\, d_{ii}^{(\bar{\lambda})}(x))$$
$$= s_\lambda \cdot \frac{1}{s_\lambda} = 1,$$

also $s_\lambda = 1$. Wir erhalten also wieder

$$\mathfrak{A}'(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda) \in L_2} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda)}(y) \quad (s_\lambda = 1 \text{ für } (\lambda, \lambda) \in L_2).$$

Hieraus ersehen wir unmittelbar, daß $\mathfrak{A}'(x, y)$ nur symmetrische Funktionen enthält. Wäre $f(x, y) \in \mathfrak{A}'(x, y)$ eine reelle nicht konstante Darstellung von $X \otimes X$, so wäre diese Darstellung eindimensional, also irreduzibel, d. h. $f(x, y) = D^{(\lambda)}(x)\, D^{(\lambda)}(y)$ mit $\lambda \neq 1$, $(\lambda, \lambda) \in L_2$. Dann wäre aber $M_{x,y}(D^{(\lambda)}(x)\, D^{(\lambda)}(y)) = 0$ und $M_x(D^{(\lambda)}(x)\, D^{(\lambda)}(x)) = 1$, was auf einen Widerspruch zur Voraussetzung führt.

Daß ein Normalteiler von X vom Index 2 die Existenz einer reellen nichtkonstanten (beschränkten) eindimensionalen Darstellung von X und damit einer solchen von $X \otimes X$ zur Folge hat, ist klar. Wir brauchen nur mehr das Umgekehrte zu zeigen. Es sei $D(x, y)$ die Darstellung. Dann ist $D(x, y) = D(x, e)\, D(e, y)$, wobei $D(x) = D(x, e)$ und $D'(x) = D(e, x)$ Darstellungen von X sind. Beide sind reell, mindestens eine von ihnen, etwa $D(x)$, ist nicht konstant. Die Elemente $x \in X$ mit $D(x) = 1$ bilden einen Normalteiler vom Index 2 in X. Satz 15 ist damit vollständig bewiesen.

Offenbar ist für die Gleichverteilungseigenschaft der Abbildung φ die Tatsache wesentlich, daß in der Zerlegung des vollen Moduls $\mathfrak{A}(x, y)$ in eine direkte Summe irreduzibler Moduln nie das Kroneckerprodukt einer nicht trivialen irreduziblen Darstellung mit der zu ihr konjugierten auftritt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn wir von vornherein von zwei sogenannten unabhängigen Darstellungen $D^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda')}$ ausgehen, d. h. wenn die von $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{D}^{(\lambda')}$ erzeugten vollen Moduln $\mathfrak{A}_1 = \sum_{\lambda_1 \in L_1} \mathfrak{D}^{(\lambda_1)}$ und $\mathfrak{A}_2 = \sum_{\lambda_2 \in L_2} \mathfrak{D}^{(\lambda_2)}$ in $\mathfrak{F}$ nur die Konstanten gemeinsam haben. Der von $\mathfrak{A}_1(x)$ und $\mathfrak{A}_2(y)$ gemeinsam erzeugte volle Modul in $\mathfrak{F}(x, y)$ ist offenbar der volle Modul

$$\mathfrak{A}(x, y) = \sum_{\lambda_1 \in L_1} \sum_{\lambda_2 \in L_2} \mathfrak{D}^{(\lambda_1)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda_2)}(y);$$

auf diesen Modul trifft daher die Aussage von Satz 15 über φ zu. Dies ist der Inhalt der ursprünglichen, von W. Maak mit Hilfe eines Ergodensatzes bewiesenen Formulierung des Satzes. Ein voller Modul, der erst durch die hier verwendete Formulierung erfaßt wird, ist beispielsweise die Algebra

$$\mathfrak{A}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\alpha \exp(2\pi i n(x + y))\}$$

aller stetigen symmetrischen Funktionen auf der zwei-dimensionalen Torusgruppe.

Korollar 15. 1. *In Satz* 15 *kann* φ *durch die Abbildungen* $\varphi'(x) = (axb, cxd)$ $(a, b, c, d \in X$, *konstant*) *und* $\varphi''(x) = (x^{-1}, x^{-1})$ *ersetzt werden.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus

$$M_{x,y}(f(x, y)) = M_{x,y}(f(axb, cyd)) = M_{x,y}(f(x^{-1}, y^{-1})).$$

Wir können diese Aussage noch vervollständigen:

Korollar 15. 2. *Es sei* $\mathfrak{A}(x, y)$ *ein voller Modul in* $\mathfrak{F}(x, y)$ *und die Abbildung* ψ *von* X *in* $X \otimes X$ *durch* $\psi(x) = (x, x^{-1})$ *definiert. Es ist* ψ *dann und nur dann eine* $(\mathfrak{A}(x, y), M_{x,y}; \mathfrak{F}(x), M_x)$*-Gleichverteilung von* X *in* $X \otimes X$, *wenn* (a) $\mathfrak{A}'(x, y) = \mathfrak{A}(x, y) \cap \mathfrak{A}(y, x)$ *nur aus schiefsymmetrischen Funktionen besteht, unter denen* (b) *keine eindimensionale reelle nicht konstante Darstellung von* $X \otimes X$ *vorkommt. Wenn* X *keinen Normalteiler vom Index* 2 *enthält, fällt die Zusatzbedingung* (b) *weg.*

Beweis: Es sei wieder

$$\mathfrak{A}(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda') \in L_1} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda')}(y).$$

Es ist ψ dann und nur dann eine $(\mathfrak{A}(x, y), M_{x,y}; \mathfrak{F}(x), M_x)$-Gleichverteilung von X in $X \otimes X$, wenn für $(\lambda, \lambda') \in L_1$ und $(\lambda, \lambda') \neq (1, 1)$

$$M_x(d_{ik}^{(\lambda)}(x)\, d_{jl}^{(\lambda')}(x^{-1})) = 0$$

gilt, also dann und nur dann, wenn die Abbildung φ aus Satz 15 eine $(\mathfrak{A}(x, y^{-1}), M_{x,y}; \mathfrak{F}(x), M_x)$-Gleichverteilung von X in $X \otimes X$ ist; hierbei ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(x, y^{-1}) &= \sum_{(\lambda, \lambda') \in L_1} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\lambda')}(y^{-1}) \\ &= \sum_{(\lambda, \lambda') \in L_1} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}^{(\bar{\lambda}')}(y)\end{aligned}$$

wieder ein voller Modul in $\mathfrak{F}(x, y)$. Nach Satz 15 ist das genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{A}(x, y^{-1}) \cap \mathfrak{A}(y, x^{-1}) = \mathfrak{A}(x, y^{-1}) \cap \mathfrak{A}(y^{-1}, x)$ nur symmetrische Funktionen enthält, unter denen keine reelle nicht konstante Darstellung von X vorkommt (es ist $\mathfrak{A}(y, x^{-1}) = \mathfrak{A}(y^{-1}, x)$ nach Satz 1. e)). Nun ist $f(x, y^{-1})$ genau dann in $\mathfrak{A}(x, y^{-1}) \cap \mathfrak{A}(y^{-1}, x)$ enthalten, wenn die Funktion $f(x, y)$ in $\mathfrak{A}(x, y) \cap \mathfrak{A}(y, x)$ enthalten ist. Außerdem ist $f(x, y^{-1}) = f(y, x^{-1})$ für alle $(x, y) \in X \otimes X$ äquivalent mit $f(x, y) = f(y^{-1}, x^{-1})$ für alle $(x, y) \in X \otimes X$. Es ist also ψ genau dann eine $(\mathfrak{A}(x, y), M_{x,y}; \mathfrak{F}(x), M_x)$-Gleichverteilung von X in $X \otimes X$, wenn $\mathfrak{A}'(x, y) = \mathfrak{A}(x, y) \cap \mathfrak{A}(y, x)$ nur schiefsymmetrische Funktionen enthält und für kein $f(x, y) \in \mathfrak{A}'(x, y)$ die Funktion $f(x, y^{-1})$ eine reelle nicht konstante Darstellung von $X \otimes X$ ist. Das letzte ist genau dann der Fall, wenn bereits $f(x, y)$ eine reelle, nicht konstante Darstellung von $X \otimes X$ ist, so daß die Behauptung folgt.

Die Aussage über ψ von Korollar 15. 2 ist wieder zutreffend, wenn $\mathfrak{A}(x, y)$ der durch zwei unabhängige irreduzible Darstellungen von X erzeugte volle Modul in $\mathfrak{F}(x, y)$ ist.

Bemerkenswert ist noch, daß der Gleichverteilungssatz von Maak (der auch auf das direkte Produkt von mehr als zwei Exemplaren von X erstreckt werden kann) und Korollar 2. 2 der vorliegenden Arbeit auf verschiedene Verallgemeinerungen des gleichen Satzes zurückgehen, den wir für zwei Dimensionen folgendermaßen formulieren können (s. [15], Satz 4):

Sind ξ_1 und ξ_2 zwei reelle Zahlen mit der Eigenschaft, daß für jedes Paar ganzer Zahlen $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$ die Ungleichung

$$n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 \not\equiv 0 \pmod 1 \tag{42}$$

besteht, so gilt für jede stetige komplexwertige Funktion $f(x, y)$ zweier reeller Veränderlicher mit der Periode 1 in x und y

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} f(l\xi_1, l\xi_2). \tag{43}$$

Da ξ_1 und ξ_2 irrational sein müssen, gilt bei zweimaliger Anwendung des gleichen, für eine Dimension formulierten Satzes,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{j} \left[\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{j} \sum_{m=1}^{h} f(m\xi_1, n\xi_2) \right]. \tag{44}$$

Fassen wir hier nach (42) $\exp(2\pi i m\xi_1)$ und $\exp(2\pi i n\xi_2)$ als unabhängige Darstellungen der Gruppe G der ganzen Zahlen und $f(m\xi_1, n\xi_2)$ als fp. Funktion auf $G \otimes G$ auf, so nimmt der Satz unter Berücksichtigung der Gleichheit der rechten Seiten von (43) und (44) eine Form an, deren direkte Verallgemeinerung der Gleichverteilungssatz von W. Maak ist.

Fassen wir jedoch $\exp(2\pi i(mx + ny))$ bei festem (m, n) als Darstellung der zweidimensionalen Torusgruppe auf, so erhält der obige Satz folgende Form:

Ist (ξ_1, ξ_2) ein Element der Torusgruppe R_2, das in keiner irreduziblen nicht trivialen Darstellung durch 1 dargestellt wird, dann sind die Potenzen von (ξ_1, ξ_2) in R_2 gleichverteilt.

Von dieser Fassung ausgehend, wurde der Satz zunächst von Eckmann auf kompakte Gruppen übertragen (s. [2], Satz 8). In Weiterführung dieser Verallgemeinerung gelangten wir zu Korollar 2. 2 und Korollar 8. 2 der vorliegenden Arbeit.

Wir gehen zum Abschluß auf eine Verschärfung eines Gleichverteilungssatzes ein, der es ermöglicht, unter bestimmten Voraussetzungen aus einer Gleichverteilung eines direkten Produktes von Untergruppen von X in X eine Gleichverteilung der Menge P aller natürlichen Zahlen in X abzuleiten (s. [3], Satz 1). Es sei $\mathfrak{L}$ die Menge aller beschränkten komplexwertigen Funktionen f auf P, für die der Grenzwert

$$\Lambda(f) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} f(i)$$

existiert. Nach dem Weylschen Kriterium ist $\mathfrak{L}$ vollständig und Λ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathfrak{L}$, das außerdem monoton, normiert und im Sinne der Addition in P invariant ist. Mit n Exemplaren P_i und $\mathfrak{L}_i$ von P bzw. $\mathfrak{L}$ $(i = 1, \ldots, n)$ bilden wir den von $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{L}_i$ erzeugten Banachraum $\mathfrak{L}_{1,\ldots,n}$ beschränkter komplexwertiger Funktionen auf dem direkten Produkt $P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$, d. h. die abgeschlossene lineare Hülle der Menge aller Funktionen von der Form $\prod_{i=1}^{n} f_i(p_i)$ $(f_i \in \mathfrak{L}_i)$ im Banachraum aller beschränkten komplexwertigen Funktionen auf $\bigotimes_{i=1}^{n} P_i$.

Hilfssatz 11. *Ist $(i_1, \ldots, i_n)$ eine beliebige Permutation der Indexfolge $(1, \ldots, n)$, so existiert für jede Funktion $f \in \mathfrak{L}_{1,\ldots,n}$*

$$\Lambda_{i_1,\ldots,i_n}(f) = \lim_{q_1\to\infty} \frac{1}{q_1} \sum_{p_{i_1}=1}^{q_1} \left[\ldots \lim_{q_n\to\infty} \frac{1}{q_n} \sum_{p_{i_n}=1}^{q_n} f(p_1, \ldots, p_n) \ldots \right] \tag{45}$$

und es gilt

$$\Lambda_{i_1,\ldots,i_n} = \Lambda_{1,\ldots,n} \quad (\mathfrak{L}_{1,\ldots,n}).$$

Beweis: Nach dem Weylschen Kriterium brauchen wir die Behauptung nur für die Funktionen von der Form $f(p_1, \ldots, p_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(p_i)$ $(f_i \in \mathfrak{L}_i)$ zu zeigen. (Wir können beispielsweise als X_τ die Menge aller $(p_1, \ldots, p_n) \in \bigotimes_{i=1}^{n} P_i$ mit $1 \leqq p_{i_k} < \infty$ $(k = 1, \ldots, k_\tau - 1)$, $1 \leqq p_{i_k} \leqq q$ $(k = k_\tau)$, $1 = p_{i_k}$ $(k = k_\tau + 1, \ldots, n)$ nehmen; ferner sei φ_τ die identische Abbildung von X_τ in $\bigotimes_{i=1}^{n} P_i$, sowie $\mathfrak{M}_\tau$ die Beschrän-

kung von $\mathfrak{L}_{1,\ldots,n}$ auf X_τ; das Funktional Φ_τ sei für $\mathfrak{M}_\tau$ ähnlich wie (45) definiert, und T sei die Menge aller Ordnungszahlen von 1 bis $n\omega$; daß die in Definition 2 und im Weylschen Kriterium gemachten Voraussetzungen für alle $\tau \in T$ erfüllt sind, ist mittels transfiniter Induktion nachweisbar). Für diese Funktionen ergibt sich sofort

$$\lim_{q_1\to\infty} \frac{1}{q_1} \sum_{p_{i_1}=1}^{q_1} \left[\ldots \lim_{q_n\to\infty} \frac{1}{q_n} \sum_{p_{i_n}=1}^{q_n} f(p_1, \ldots, p_n) \ldots\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \left[\lim_{q_i\to\infty} \frac{1}{q_i} \sum_{p_i=1}^{q_i} f_i(p_i)\right].$$

Offenbar ist $\Lambda_{1,\ldots,n}$ wieder ein monotones, normiertes und im Sinne der Addition in $\bigotimes_{i=1}^{n} P_i$ invariantes lineares Funktional auf $\mathfrak{L}_{1,\ldots,n}$.

Satz 16. *Es sei $\pi_{1,\ldots,n}$ eine Abbildung von P in $\bigotimes_{i=1}^{n} P_i$, die folgenden Bedingungen genügt:*

Es existiere eine Folge von Quadern $Q^{(k)} = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \bigotimes_{i=1}^{n} P_i : 1 \leqq p_i \leqq q_i^{(k)}\}$ und eine Folge natürlicher Zahlen $m^{(k)}$ derart, daß

$$Q^{(k)} < \{\pi_{1,\ldots,n}(p) : \ 1 \leqq p \leqq m^{(k)}\} \tag{46}$$

$$\lim_{k\to\infty} q_i^{(k)} = \infty \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \tag{47}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m^{(k+1)}}{\prod_{i=1}^{n} q_i^{(k)}} = 1. \tag{48}$$

Dann ist $\pi_{1,\ldots,n}$ eine $(\mathfrak{L}_{1,\ldots,n}, \Lambda_{1,\ldots,n}; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilung von P in $\bigotimes_{i=1}^{n} P_i$.

Beweis: Wir wenden wieder das Weylsche Kriterium an und schreiben $\sum_{1\leq p_i\leq q_i} f(p_1, \ldots, p_n)$ für $\sum_{p_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{p_n=1}^{q_n} f(p_1, \ldots, p_n)$. Es sei $f \in \mathfrak{L}_{1,\ldots,n}$, ferner $f(p_1, \ldots, p_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(p_i)$ und $\|f\| > 0$, also

$$\Lambda_{1,\ldots,n}(f) = \prod_{i=1}^{n} \left[\lim_{q_i\to\infty} \frac{1}{q_i} \sum_{p_i=1}^{q_i} f_i(p_i)\right].$$

Wir können wegen (47) k so groß wählen, daß bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$\left|\Lambda_{1,\ldots,n}(f) - \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{q_i^{(l)}} \sum_{p_i=1}^{q_i^{(l)}} f_i(p_i)\right]\right| \tag{49}$$
$$= \left|\Lambda_{1,\ldots,n}(f) - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} q_i^{(l)}} \sum_{1\leq p_i\leq q_i^{(l)}} f(p_1, \ldots, p_n)\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } l \geqq k$$

wird. Wegen (48) können wir k so groß wählen, daß außerdem gilt:

$$\left|\frac{m^{(l+1)}}{\prod_{i=1}^{n} q_i^{(l)}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{3\|f\|} \quad \text{für alle } l \geqq k. \tag{50}$$

Es sei nun $m \geqq m^{(k)}$ beliebig gegeben und $l \geqq k$ derart bestimmt, daß

$$m^{(l)} \leqq m < m^{(l+1)} \tag{51}$$

ist. Dies ist stets möglich, da aus (48) $\lim\limits_{k \to \infty} m^{(k)} = \infty$ folgt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} f \circ \pi_{1,\ldots,n}(p) - \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} q_i^{(l)}} \sum_{1 \leq p_i \leq q_i^{(l)}} f(p_1, \ldots, p_n) \right| \\
&\leqq \left| \left(1 - \frac{m}{\prod\limits_{i=1}^{n} q_i^{(l)}}\right) \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} f \circ \pi_{1,\ldots,n}(p) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} q_i^{(l)}} \left(\sum_{p=1}^{m} f \circ \pi_{1,\ldots,n}(p) - \sum_{1 \leq p_i \leq q_i^{(l)}} f(p_1, \ldots, p_n) \right) \right| \\
&\leqq \left(\frac{m^{(l+1)}}{\prod\limits_{i=1}^{n} q_i^{(l)}} - 1 \right) \| f \| + \left(\frac{m^{(l+1)}}{\prod\limits_{i=1}^{n} q_i^{(l)}} - 1 \right) \| f \| \\
&< \frac{2\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt aus (46) und (51). Mit Rücksicht auf (49) folgt daraus weiter

$$\left| \Lambda_{1,\ldots,n}(f) - \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} f \circ \pi_{1,\ldots,n}(p) \right| < \varepsilon \text{ für alle } m \geqq m^{(k)},$$

also

$$\Lambda_{1,\ldots,n}(f) = \Lambda(f \circ \pi_{1,\ldots,n}), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Korollar 16. 1. *Für jede Funktion $f \in \mathfrak{L}_{1,\ldots,n}$ gilt*

$$\Lambda_{1,\ldots,n}(f) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^n} \sum_{1 \leq p_i \leq k} f(p_1, \ldots, p_n).$$

Beweis: Wir setzen $Q^{(k)} = \{(p_1, \ldots, p_n) \colon 1 \leqq p_i \leqq k,\ i = 1, \ldots, n\}$. Weiter setzen wir $\pi_{1,\ldots,n}(1) = (1, \ldots, 1)$ und definieren, wenn $\pi_{1,\ldots,n}(p)$ für $1 \leqq p \leqq k^n$ bereits bestimmt ist, $\pi_{1,\ldots,n}$ für $k^n < p \leqq (k+1)^n$ so, daß $Q^{(k+1)} \setminus Q^{(k)} = \{\pi_{1,\ldots,n}(p) \colon k^n < p \leqq (k+1)^n\}$ ist. Wenn wir $m^{(k)} = k^n$ setzen, sind (46), (47) und (48) erfüllt, daher ist nach Satz 16 $\Lambda_{1,\ldots,n}(f) = \lim\limits_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum\limits_{p=1}^{m} f \circ \pi_{1,\ldots,n}(p)$. Für die Unterfolge mit $m = k^n$ ergibt sich die Behauptung.

Es sei wieder $\{X_i \colon i = 1, \ldots, n\}$ ein System von Untergruppen der Gruppe X, sowie $\mathfrak{F}_i$ die Menge aller fp. Funktionen auf X_i und M_i der zugehörige Mittelwert. Außerdem sei $\mathfrak{F}_{1,\ldots,n}$ die Menge aller fp. Funktionen auf dem direkten Produkt $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} X_i$ und $M_{1,\ldots,n}$ der zugehörige Mittelwert.

Hilfssatz 12. *Es sei für $i = 1, \ldots, n$ die Abbildung π_i von P in X_i definiert durch*

$$\pi_i(p) = x_{i,p} \in X_i$$

und die Abbildung $(\pi_i) = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ von $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} P_i$ in $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} X_i$ durch

$$(\pi_1, \ldots, \pi_n)\ (p_1, \ldots, p_n) = (x_{1,p_1}, \ldots, x_{n,p_n}).$$

Ist für $i = 1, \ldots, n$ die Abbildung π_i eine $(\mathfrak{F}_i, M_i; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilung von P in X_i, dann ist $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ eine $(\mathfrak{F}_{1,\ldots,n}, M_{1,\ldots,n}; \mathfrak{L}_{1,\ldots,n}, \Lambda_{1,\ldots,n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{i=1}^{n} P_i$ in $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$.

Beweis: Es sei $D^{(\lambda)}$ eine beschränkte irreduzible Darstellung von $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$. Dann ist $D^{(\lambda)}(e, \ldots, e, x_i, e, \ldots, e) = D_i^{(\lambda)}(x_i)$ eine beschränkte Darstellung von X_i und $D_1^{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_n) = D_1^{(\lambda)}(x_1) \cdots D_n^{(\lambda)}(x_n)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} M_{1,\ldots,n}(D^{(\lambda)}) &= \prod_{i=1}^{n} M_i(D_i^{(\lambda)}) = \prod_{i=1}^{n} \Lambda_i(D_i^{(\lambda)} \circ \pi_i) \\ &= \Lambda_{1,\ldots,n}\left(\prod_{i=1}^{n} D_i^{(\lambda)} \circ \pi_i\right) \\ &= \Lambda_{1,\ldots,n}\left(D^{(\lambda)} \circ (\pi_1, \ldots, \pi_n)\right). \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten beschränkter irreduzibler Darstellungen ein Hauptsystem von $\mathfrak{F}_{1,\ldots,n}$ bilden, folgt nach dem Weylschen Kriterium die Behauptung.

Unmittelbar aus den Definitionen 1 und 2 folgt:

Hilfssatz 13. a) *Ist φ_1 eine $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_2, \Phi_2)$-Gleichverteilung von X_2 in X_1 und φ_2 eine $(\mathfrak{M}_2, \Phi_2; \mathfrak{M}_3, \Phi_3)$-Gleichverteilung von X_3 in X_2, dann ist $\varphi_1 \circ \varphi_2$ eine $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_3, \Phi_3)$-Gleichverteilung von X_3 in X_1.*

b) *Ist $\{\varphi_\tau : \tau \in T\}$ eine asymptotische $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}_\tau, \Phi_\tau)$-Gleichverteilung von X_2 in X_1 und ist für jeden Index $\tau \in T$ auch φ'_τ eine $(\mathfrak{M}_\tau, \Phi_\tau; \mathfrak{M}'_\tau, \Phi'_\tau)$-Gleichverteilung von $X'_\tau < X_3$ in X_τ, dann ist $\{\varphi_\tau \circ \varphi'_\tau : \tau \in T\}$ eine asymptotische $(\mathfrak{M}_1, \Phi_1; \mathfrak{M}'_\tau, \Phi'_\tau)$-Gleichverteilung von X_3 in X_1.*

Ist also die früher definierte Abbildung $\varphi_{1,\ldots,n}$ eine $(\mathfrak{M}, \Phi; \mathfrak{F}_{1,\ldots,n}, M_{1,\ldots,n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{i=1}^{n} X_n$ in X, dann ist nach Hilfssatz 12 $\varphi_{1,\ldots,n} \circ (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ eine $(\mathfrak{M}, \Phi; \mathfrak{L}_{1,\ldots,n}, \Lambda_{1,\ldots,n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{i=1}^{n} P_i$ in X, und nach Satz 16 ist $\varphi_{1,\ldots,n} \circ (\pi_1, \ldots, \pi_n) \circ \pi_{1,\ldots,n}$ eine $(\mathfrak{M}, \Phi; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilung von P in X. In Verbindung mit Korollar 16. 1 erhalten wir:

Satz 17a. *Es sei die Abbildung $\varphi_{1,\ldots,n}$ eine $(\mathfrak{M}, \Phi; \mathfrak{F}_{1,\ldots,n}, M_{1,\ldots,n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ in X, und für $i = 1, \ldots, n$ sei die durch $\pi_i(p) = x_{i,p}$ definierte Abbildung π_i eine $(\mathfrak{F}_i, M_i; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilung von P in X_i. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathfrak{M}$*

$$\Phi(f) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^n} \sum_{1 \leq p_i \leq k} f(x_{1,p_1} \cdots x_{n,p_n}).$$

Es sei weiter $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen von X. Wir definieren $\varphi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$, π_ϱ und $\pi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$ analog wie oben. Wenn wir in den Indexsystemen $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ wie in § 4 eine Teilordnung einführen, ergibt sich in Ergänzung zu Satz 17a:

Satz 17b. *Es sei*

$$\mathfrak{N} = \{\varphi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$$

eine asymptotische $(\mathfrak{M}, \Phi; \mathfrak{F}_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}, M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{\varrho \in R} X_\varrho$ in X, und für jeden Index $\varrho \in R$ sei die durch $\pi_\varrho(p) = x_{\varrho,p} \in X_\varrho$ definierte Abbildung π_ϱ eine $(\mathfrak{F}_\varrho, M_\varrho; \mathfrak{L}, \Lambda)$-

Gleichverteilung von P in X_ϱ. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathfrak{M}$

$$\Phi(f) = \lim_{\mathfrak{N}} \left[\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^n} \sum_{1 \leq p_i \leq k} f(x_{\varrho_1, p_1} \cdots x_{\varrho_n, p_n}) \right].$$

Beweis: Nach Hilfssatz 13, b) und Hilfssatz 12 ist $\{\varphi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} \circ (\pi_{\varrho_1}, \ldots, \pi_{\varrho_n}) : (\varrho_i) \in (R)\}$ eine asymptotische $(\mathfrak{M}, \Phi; \mathfrak{L}_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}, \Lambda_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n})$-Gleichverteilung von $\bigcup_{\mathfrak{N}} \bigotimes_{i=1}^{n} P_{\varrho_i}$ in X. Nach Satz 16 und Hilfssatz 13, b) ist $\{\varphi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} \circ (\pi_{\varrho_1}, \ldots, \pi_{\varrho_n}) \circ \pi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ eine asymptotische $(\mathfrak{M}, \Phi; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilung von P in X. Durch spezielle Wahl von $\pi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$ wie in Korollar 16. 1 ergibt sich die Behauptung.

Wir wenden dies auf eine Abelsche Gruppe an.

Korollar 17. 1. *Es sei $\{x_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System die Abelsche Gruppe X erzeugender Elemente und $\mathfrak{N} = \{(\varrho_i) \in (R)\}$ ein Netz von Indexsystemen. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathfrak{F}$*

$$M(f) = \lim_{\mathfrak{N}} \left[\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^n} \sum_{1 \leq p_i \leq k} f(x_{\varrho_1}^{p_1} \cdots x_{\varrho_n}^{p_n}) \right]. \tag{52}$$

Beweis: Es sei X_ϱ die von x_ϱ erzeugte zyklische Untergruppe von X. Dann ist X_ϱ endlich oder isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen und in beiden Fällen (vgl. [11], § 28)

$$M_\varrho(f) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{k} f(x_\varrho^p) \text{ für alle } f \in \mathfrak{F}_\varrho,$$

d. h. die durch $\pi_\varrho(p) = x_\varrho^p \in X_\varrho$ definierte Abbildung π_ϱ ist eine $(\mathfrak{F}_\varrho, M_\varrho; \mathfrak{L}, \Lambda)$-Gleichverteilung von P in X. Da die Gruppe durch $\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho$ schlechthin erzeugt wird, ist nach Korollar 11. 1 das Netz $\{\varphi_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ eine asymptotische $(\mathfrak{F}, M; \mathfrak{F}_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}, M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n})$-Gleichverteilung von $\bigotimes_{\varrho \in R} X_\varrho$ in X. Aus Satz 17. b folgt dann die Behauptung.

Wir betrachten als Illustration zu Korallar 17. 1 die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Ein erzeugendes System von Elementen ist die Menge aller Brüche $\frac{1}{p_i^{n_i}}$, wobei nun p_i die i-te Primzahl und n_i eine beliebige natürliche Zahl bedeuten soll. Wir können die Formel (52) hier folgendermaßen vereinfachen: es sei X_m die zyklische, von $\frac{1}{\prod_{i=1}^{m} p_i^m}$ erzeugte Untergruppe. Sie wird auch erzeugt von den m^m Elementen $\frac{1}{p_i^{n_i}}$ mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq n_i \leq m$. Nach Korallar 10. 2 ist die Folge $\{M_m : m = 1, 2, \ldots\}$ ein gegen $M(\mathfrak{F})$ konvergierendes Netz von Funktionalen. Also gilt für jede Funktion $f \in \mathfrak{F}$

$$M(f) = \lim_{m \to \infty} \left[\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{q=1}^{k} f\left(\frac{q}{\prod_{i=1}^{m} p_i^m} \right) \right].$$

Literatur.

[1] *J. G. van der Corput*, Diophantische Ungleichungen I. Zur Gleichverteilung modulo Eins. Acta Math. **56** (1931), 373—456.

[2] *B. Eckmann*, Über monothetische Gruppen. Comm. Math. Helv. **16** (1943), 249—263.

[3] *G. Helmberg*, Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen. II. Monatsh. f. Math. **63** (1959), 368—377.

[4] *E. Hlawka*, Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II. Tom. IV (1955), 33—47.

[5] *E. Hlawka*, Folgen auf kompakten Räumen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1956), 223—241.

[6] *Yukiyosi Kawada* and *Kiyosi Ito*, On the probability distribution on a compact group. I. Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan (Ser. 3) **22** (1940), 977—998 (Math. Rev. **2** (1941), 223).

[7] *J. L. Kelley*, General topology. New York, 1955.

[8] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*, Asymptotic *C*-distribution. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wetensch. **52** (1949), 1151—1157.

[9] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*, Uniform distribution (mod 1) in sequences of intervals. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wetensch. **53** (1950), 1038—1048.

[10] *L. H. Loomis*, An Introduction to abstract harmonic analysis. New York, 1953.

[11] *W. Maak*, Fastperiodische Funktionen. Berlin, 1950.

[12] *W. Maak*, Der Kronecker-Weylsche Gleichverteilungssatz für beliebige Matrizengruppen. Abh. math. Sem Univ. Hamburg **17** (1951), 91—94.

[13] *K. R. Stromberg*, Probabilities on a compact group. Thesis, Univ. of Wash., Seattle, USA (1958). Eingereicht bei den Trans. Am. Math. Soc.

[14] *J. G. Wendel*, Haar measure and the semigroup of measures on a compact group. Proc. Am. Math. Soc. **5** (1954), 923—929.

[15] *H. Weyl*, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Annalen **77** (1916), 313—352.

Eingegangen 12. Februar 1960.

Anwendungen unendlich kleiner Zahlen.

II. Ein Zugang zur Operatorenrechnung von Mikusiński.

Von *Detlef Laugwitz* in Darmstadt.

1. Vorbemerkungen.

Die Operatorenrechnung, von O. Heaviside eingeführt und in Anwendungen erprobt, stellt eine von der Distributionstheorie verschiedene Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs dar. In der Gestalt, die Mikusiński [2] der Operatorenrechnung gegeben hat, erscheinen die Operatoren als „Quotienten" von Funktionen, wobei diese Quotientenbildung die Umkehroperation der Faltungsmultiplikation $f * g$ von Funktionen ist, welche für $t \geqq 0$ definiert (und etwa stetig) sind:

$$f * g = h(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Die Faltungsquotienten, die damit formal algebraisch eingeführt sind, sind aber i. a. selbst keine Funktionen.

Wie in Teil I für die Distributionstheorie, so wollen wir hier für die Operatorenrechnung eine andere Begründung geben. Wir gehen dabei wieder von den Ω-Zahlen aus und werden zeigen, daß sich alle Operatoren als Funktionen über diesen Zahlen darstellen lassen, so daß auch hier keine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes benötigt wird. Man erhält damit auch anschauliche Deutungen für solche Operatoren, die in Mikusińskis Theorie nicht durch Funktionen darstellbar sind. Außerdem ergibt sich eine Methode zur Berechnung von Faltungsquotienten, d. h. zur Auflösung der Integralgleichung (1) nach g.

Unsere Methode wird darauf beruhen, daß wir stetige, für $t \geqq 0$ definierte Funktionen durch Treppenfunktionen zu unendlich kleiner Schrittweite ersetzen, die sich unendlich wenig von den stetigen Funktionen unterscheiden. Wir wollen für zwei für $t \geqq 0$ definierte Funktionen definieren:

$f \cong g$ genau dann, wenn eine monoton nicht fallende unendlich kleine Funktion $\varepsilon(t)$ $(t \geqq 0)$ existiert, so daß

$$|f(t) - g(t)| \leqq \varepsilon(t)$$

für alle positiven endlichen t ist.

Diese Äquivalenzrelation ist verträglich mit Addition und Faltungsmultiplikation, falls die Integrale

$$\int_0^t |f(\tau)|\, d\tau, \qquad \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau$$

endlich sind: Aus $f \simeq \bar{f}$, $g \simeq \bar{g}$ folgt $f + g \simeq \bar{f} + \bar{g}$ und $f * g \simeq \bar{f} * \bar{g}$. Ist nämlich

$$|f(t) - \bar{f}(t)| \leqq \varepsilon_1(t),$$
$$|g(t) - \bar{g}(t)| \leqq \varepsilon_2(t)$$

($\varepsilon_j(t)$ monoton nicht fallend, unendlich klein), so folgt

$$(2) \qquad |f(t) + g(t) - (\bar{f}(t) + \bar{g}(t))| \leqq \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

und für $h = f * g$, $\bar{h} = \bar{f} * \bar{g}$

$$|h(t) - \bar{h}(t)| = \left| \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau - \int_0^t \bar{f}(t-\tau)\, \bar{g}(\tau)\, d\tau \right|$$
$$= \int_0^t (f(t-\tau) - \bar{f}(t-\tau))\, g(\tau)\, d\tau - \int_0^t \bar{f}(t-\tau)\, (\bar{g}(\tau) - g(\tau))\, d\tau$$
$$\leqq \varepsilon_1(t) \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau + \varepsilon_2(t) \int_0^t |\bar{f}(\tau)|\, d\tau,$$

also

$$(3) \qquad |h(t) - \bar{h}(t)| \leqq \varepsilon_1(t) \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau + \varepsilon_2(t) \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau + t\varepsilon_1(t)\, \varepsilon_2(t).$$

Die rechten Seiten von (2) und (3) sind unendlich klein und monoton nicht fallend, was zu beweisen war.

2. ω-Treppenfunktionen.

Eine normale Funktion $f(t)$ heiße eine Treppenfunktion zur Schrittweite ω, kurz eine ω-Treppenfunktion, wenn sie in den Intervallen $N\omega < t < (N+1)\,\omega$ jeweils konstant ist und für $t < 0$ verschwindet. Genauer:

$f(t)$ ist für alle ω-Zahlen t erklärt durch

$$f(t) = f_N \quad \text{für} \quad N\omega < t < (N+1)\,\omega$$
$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0;$$

dabei ist $N = N_\Omega \geqq 0$ eine ganze und $f_N = f_{\Omega N_\Omega}$ eine beliebige Ω-Zahl. In den Sprungstellen $t = N\omega$ selbst kann der Funktionswert beliebig sein, z. B. gleich f_N.

Es sei $F(t)$ eine für reelle $t \geqq 0$ erklärte reellwertige Funktion. Wir ordnen ihr eine ω-Treppenfunktion $f(t)$ zu, für welche $F \simeq f$ gilt, die also von F nur unendlich wenig abweicht, falls F im gewöhnlichen Sinne stetig ist. Dazu erweitern wir F zunächst durch stetige Fortsetzung ([1], Nr. 3) auf alle Ω-Zahlen $t \geqq 0$ und setzen dann

$$f_N = F(N\omega).$$

Wir müssen unter Voraussetzung der Stetigkeit im gewöhnlichen Sinne von F noch zeigen, daß $F \simeq f$ ist. Sei t reell; dann gilt im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq \tau \leqq t$, daß es eine unendlich kleine Zahl $\varepsilon(t)$ gibt, so daß $|F(\tau) - F(\bar{\tau})| \leqq \varepsilon(t)$ für $|\tau - \bar{\tau}| \leqq \omega$ ist. $\varepsilon(t)$ ist monoton nicht fallend, unendlich klein und erfüllt

$$|F(t) - f(t)| \leqq \varepsilon(t).$$

Wir werden uns im folgenden nur noch mit Treppenfunktionen zur Schrittweite ω befassen; diese sollten für alle Fragen der Praxis, in denen die mögliche Genauigkeit ja sogar endlich und nicht unendlich klein ist, ausreichen.

Damit eine ω-Treppenfunktion normal sei — was wir ja stets voraussetzen —, muß die n-te Komponente $f_{nN_n}(t_\Omega)$ des Funktionswertes $f(t_\Omega)$ nach der Definition der normalen Funktionen ([1], Nr. 3) allein von n und t_n abhängen. Wegen $N_\Omega \omega < t < (N+1)\,\omega$ folgt $N_n < nt_n < (N_n + 1)$ für $n \geqq n_0$, und N_n ist als größte ganzrationale Zahl $< nt_n$ eindeutig durch n und t_n bestimmt. Die ω-Treppenfunktion ist also normal genau dann, wenn $f_{nN_n}(t_\Omega)$ allein von n und N_n abhängt, d. h. wenn $f_{nN_n}(t) = f_{nN_n}$ ist. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn die ω-Treppenfunktion $f(t)$ Approximationsfunktion einer reellen Funktion $F(t)$ ist; dann ist $f(t) = f_{\Omega N_\Omega} = F\left(\frac{N_\Omega}{\Omega}\right)$ und $f_{nN_n} = F\left(\frac{N_n}{n}\right)$ also in der Tat nur von N_n und n abhängig.

Eine Zuordnung, durch die jeder nichtnegativen ganzen Ω-Zahl N_Ω eine Ω-Zahl $f_{\Omega N_\Omega}$ entspricht, möge eine normale Folge heißen, wenn die n-te Komponente f_{nN_Ω} nur von n und N_n abhängt; wir schreiben für sie dann f_{nN_n}. Für spätere Zwecke beweisen wir das

Lemma. *Zwei normale Folgen $f_{\Omega N_\Omega}$, $g_{\Omega N_\Omega}$ stimmen dann und nur dann gliedweise überein ($f_{\Omega N_\Omega} = g_{\Omega N_\Omega}$ für alle N_Ω), wenn es eine ganzrationale Zahl n_0 gibt, so daß $f_{nm} = g_{nm}$ für $n \geqq n_0$ und alle ganzrationalen m gilt.*

Es ist klar, daß die Existenz eines solchen n_0 hinreichend für die Gleichheit der Folgen ist. — Gäbe es nun kein solches n_0, so könnte man eine aufsteigende Folge n_k von ganzrationalen Zahlen und Zahlen $m_k = \bar{N}_{n_k}$ finden, so daß $f_{n_k m_k} \neq g_{n_k m_k}$ ist. Dann wäre aber für N_Ω mit $N_{n_k} = \bar{N}_{n_k}$ auch $f_{\Omega N_\Omega} \neq g_{\Omega N_\Omega}$, entgegen der Voraussetzung.

Im folgenden werden alle ω-Treppenfunktionen als normal vorausgesetzt; von den bewiesenen Eigenschaften normaler Folgen wird häufig Gebrauch gemacht werden, auch ohne daß dies jedes Mal explizit ausgesprochen wird.

Wir erklären den Differentialquotienten einer ω-Treppenfunktion durch den Differenzenquotienten zum Zuwachs ω:

$$f'(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{f(t) - f(t-\omega)}{\omega}.$$

Es ist also

$$f'(t) = \frac{f_N - f_{N-1}}{\omega} \quad \text{für } N\omega < t < (N+1)\,\omega$$

(dabei ist $f_{-1} \underset{\text{def}}{=} 0$). Alle ω-Treppenfunktionen besitzen einen Differentialquotienten, und dieser ist wieder eine ω-Treppenfunktion. Für den so erklärten Differentialquotienten gelten folgende Regeln:

a) *Aus $f'(t) = 0$ folgt $f(t) = \text{const}$.*

Denn es ist $f_N = f_{N-1}$ für alle N.

b) $(f+g)' = f' + g'$,

wie aus der Definition unmittelbar klar ist.

c) $$(f(t)\,g(t))' = \frac{f(t)\,g(t) - f(t-\omega)\,g(t-\omega)}{\omega}$$
$$= \frac{f(t) - f(t-\omega)}{\omega}\,g(t) + f(t-\omega)\,\frac{g(t) - g(t-\omega)}{\omega}$$
$$= f'(t)\,g(t) + g'(t)\,f(t-\omega).$$

Entsprechend erklären wir das Integral einer ω-Treppenfunktion:

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{N} f_k\,\omega \quad \text{für } N\omega < t < (N+1)\,\omega.$$

Wir beweisen kurz den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\left(\int_0 f(\tau)\,d\tau\right)' = \frac{1}{\omega}\left(\sum_{k=0}^{N} f_k\omega - \sum_{k=0}^{N-1} f_k\omega\right) = f_N = f(t).$$

Die Regeln für die Integration von Summen und Produkten folgen wie üblich. — Die so erklärte Differentiation und Integration führen aus dem Bereich der ω-Treppenfunktionen nicht heraus.

3. Faltung von ω-Treppenfunktionen.

Es seien f und g zwei ω-Treppenfunktionen; das Faltungsprodukt $h = f * g$ erklären wir durch

$$h(t) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{N} f_{N-k} g_k \omega \quad \text{für} \quad N\omega < t < (N+1)\,\omega. \tag{4}$$

Für $l(t) = 1$ gilt

$$(f * l)(t) = (l * f)(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

mit dem in Nr. 2 erklärten Integral.

Ist $t = N\omega$, $N \geqq 0$, ganz, so ist $f(t-\tau)\,g(\tau)$ eine ω-Treppenfunktion von τ, und in diesem Falle stimmt unsere Faltung mit dem im Sinne von Nr. 2 genommenen Integral

$$\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

überein.

Durch Umbenennen des Summationsindex in (4) folgt

$$f * g = g * f.$$

Etwas weniger selbstverständlich als diese Kommutativität des Faltungsproduktes ist die Assoziativität:

$$(f * g) * h = f * (g * h),$$

wobei f, g, h wieder drei beliebige ω-Treppenfunktionen sind. Sei $N\omega < t < (N+1)\,\omega$; dann ist mit der Substitution $k - l = N - r$

$$(f * g) * h = \sum_{k=0}^{N} (f * g)_k h_{N-k}\omega = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{k} f_{k-l} g_l h_{N-k}\omega^2$$

$$= \sum_{r=0}^{N} f_{N-r} \sum_{l=0}^{r} g_l h_{r-l}\,\omega^2 = f * (g * h),$$

was zu beweisen war. — Da offenbar auch die Distributivität gilt:

$$f * (g + h) = f * g + f * h,$$

bilden die ω-Treppenfunktionen bei Addition und Faltungsmultiplikation einen kommutativen Ring. In diesem Ring existiert ein Einselement der Multiplikation, δ, mit

$$f * \delta = f$$

für alle ω-Treppenfunktionen f. Dafür gilt die Bedingungsgleichung

$$\sum_{k=0}^{N} \delta_{N-k} f_k \omega = f_N,$$

und daraus folgt als notwendig und hinreichend für δ:

$$\delta_0 = \Omega = \frac{1}{\omega}; \quad \delta_N = 0 \text{ für } N > 0. \tag{5}$$

Das Einselement δ der Faltungsmultiplikation ist also diese Deltafunktion, die der Diracschen entspricht.

Ein einfacher, aber wichtiger Satz ist die Nullteilerfreiheit des Ringes der ω-Treppenfunktionen (der entsprechende „Satz von Titchmarsh" in der Theorie von Mikusiński liegt wesentlich tiefer):

Aus $f * g = 0$ folgt, daß mindestens eine der beiden Funktionen f, g identisch verschwindet.

(Dabei beziehen sich alle Aussagen natürlich auf Intervalle $N\omega < t < (N+1)\,\omega$, da die Funktionswerte in den Punkten $t = N\omega$ ja willkürlich sind.)

Wäre nämlich $f * g = 0$, aber f nicht identisch 0, also etwa $f_{N_0} \neq 0$, $f_k = 0$ für $k < N_0$, so folgte aus (4) für $N = N_0$

$$f_{N_0} g_0 = 0,$$

also $g_0 = 0$ und für $N > N_0$

$$0 = \sum_{k=0}^{N} f_k g_{N-k} = f_{N_0} g_{N-N_0} + \sum_{k=N_0+1}^{N} f_k g_{N-k}$$

und daraus $g_{N-N_0} = 0$, also $g(t) \equiv 0$.

Wegen der damit bewiesenen Nullteilerfreiheit kann man im formal-algebraischen Sinne den Quotientenkörper dieses Ringes bilden. Dessen Elemente sind die „Faltungsquotienten" $g = \frac{h}{f}$, wobei diese Gleichung nichts anderes bedeutet, als daß $f * g = h$ ist. Wir werden zeigen, daß sich die Faltungsquotienten g hier als ω-Treppenfunktionen darstellen lassen, was in der Theorie von Mikusiński i. a. nicht gilt. In $\delta = \frac{f}{f}$ haben wir bereits ein Beispiel dafür kennengelernt, daß ein solcher Quotient durch eine ω-Treppenfunktion darstellbar ist, während bei Mikusiński keine Funktion $\delta(t)$ mit der entsprechenden Eigenschaft existiert.

Wir zeigen zunächst:

Es seien h und f ω-Treppenfunktionen, und es sei $f_0 \neq 0$, d. h. $f(t)$ sei im ersten ω-Intervall $0 < t < \omega$ von Null verschieden. Dann gibt es genau eine ω-Treppenfunktion g mit $f * g = h$.

Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß $f * (g - \tilde{g}) = 0$ auch $g - \tilde{g} = 0$ zur Folge hat.

Der Existenzbeweis ergibt sich aus den Definitionsgleichungen

$$\sum_{k=0}^{N} f_{N-k} g_k \omega = h_N$$

durch sukzessives Auflösen nach g_N:

$$f_0 g_N \omega = h_N - \sum_{k=0}^{N-1} f_{N-k} g_k \omega;$$

diese Auflösung ist wegen $f_0 \neq 0$ möglich.

Übrigens kann man daraus leicht eine explizite Formel für den Faltungsquotienten aufstellen. Wir begnügen uns hier mit der Aufstellung einer solchen Formel für die

Faltungsinverse g, welche durch $f * g = \delta$ definiert ist; vorausgesetzt ist zunächst wieder $f_0 \neq 0$. Dann hat man

$$f_0 g_0 \omega = \delta_0 = \Omega, \quad \text{also} \quad g_0 = \frac{\Omega^2}{f_0},$$

und für $N > 0$

$$g_N f_0 + \sum_{k=0}^{N-1} g_{N-k} f_k = 0. \tag{6}$$

Daraus hat man

$$g_1 = \frac{\Omega^2}{f_0}\left(-\frac{f_1}{f_0}\right),$$

$$g_2 = \frac{\Omega^2}{f_0}\left(\frac{f_1^2}{f_0^2} - \frac{f_2}{f_0}\right),$$

und allgemein folgt durch Schluß von N auf $N+1$

$$g_N = \frac{\Omega^2}{f_0} \sum_{j=1}^{N} (-1)^j \sum_{i_1+\cdots+i_j=N} \frac{f_{i_1} \cdots f_{i_j}}{f_0^j}.$$

Übrigens wird man bei Berechnungen meistens direkt auf (6) zurückgreifen und damit schneller zum Ziele kommen als mit dieser expliziten Formel.

Falls $f_0 = 0$ ist, kann man sich dadurch helfen, daß man f in $0 < t < \omega$ unendlich wenig abändert und zu einer neuen Funktion übergeht, die in diesem Intervall zwar unendlich klein ist, aber nicht verschwindet. Nach den Überlegungen aus 1. bewirkt eine solche Abänderung für alle Additionen und Faltungsmultiplikationen nur unendlich kleine Abänderungen; anders liegt der Sachverhalt allerdings bei Faltungsdivisionen, worauf wir noch zurückkommen müssen.

4. Darstellung von Integration und Differentiation durch Faltungsprodukte.

Mit l werde die ω-Treppenfunktion $l(t) = 1$ bezeichnet. Wir wissen bereits aus Nr. 3, daß

$$(l * f)(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

ist. Da $l_0 = 1 \neq 0$ ist, existiert eine Faltungsinverse s mit $s * l = \delta$. Wir haben die Bestimmungsgleichungen

$$s_0 \omega = \Omega$$

$$(s_0 + s_1)\omega = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} s_k \omega = 0 \quad \text{für} \quad N > 1$$

und erhalten daraus

$$s_0 = \Omega^2, \quad s_1 = -\Omega^2, \quad s_N = 0 \ \text{für} \ N > 1. \tag{7}$$

($s(t)$ ist also eine Dipolfunktion.)

Wir bilden für eine beliebige ω-Treppenfunktion f:

$$\tilde{f} = s * f.$$

Dann gilt

$$\tilde{f}_0 = \Omega^2 f_0 \omega = \Omega f_0,$$

$$\tilde{f}_N = (\Omega^2 f_N - \Omega^2 f_{N-1})\,\omega = \frac{f_N - f_{N-1}}{\omega}.$$

Mit den Definitionen aus Nr. 2 und mit $f_{-1} \underset{\text{def}}{=} 0$ haben wir also

$$s * f = f',$$

so daß Faltung mit s mithin Differentiation der Funktion f bedeutet.

Allerdings spielt $N = 0$ in den Anwendungen eine Sonderrolle, welcher man besser gerecht wird, wenn man diese Formel durch einen etwas komplizierteren Ausdruck ersetzt. Ist $f(t)$ nämlich etwa eine Approximation an eine im gewöhnlichen Sinne stetige Funktion $F(t)$ mit $F(0) = f_0 \neq 0$, so ist der in unserem Sinne genommene Differentialquotient an der Stelle 0 absolut genommen unendlich groß, weil ja $F(t) = 0$ für $t < 0$ ist. Da in der gewöhnlichen Analysis unendlich große Zahlen nicht auftreten, wollen wir, um einen bequemeren Anschluß an die gewohnten Begriffe zu ermöglichen, diesen unendlichen Wert an der Stelle 0 vom übrigen Ausdruck abtrennen. Dazu bietet sich von selbst die δ-Funktion an. Wir können schreiben

$$s * f = f_0 \delta + f', \tag{8}$$

wobei wir jetzt beachten müssen, daß für f'_0 Null zu setzen ist, weil $\frac{f_0 - f_{-1}}{\omega} = f_0 \Omega$ ja bereits durch den δ-Anteil berücksichtigt ist. Die Formel (8) ist die Grundformel der Operatorenrechnung. Sie ermöglicht in dieser Schreibweise eine besonders bequeme Berücksichtigung des Anfangswertes $f(+0) = f_0$.

Als weitere Beispiele betrachten wir die Faltungsprodukte von s mit sich selbst. Für $s^2 = s * s$[1]) haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} s_0^2 &= s_0 s_0 \omega = \Omega^3, \\ s_1^2 &= (s_0 s_1 + s_1 s_0)\, \omega = -2\Omega^3, \\ s_2^2 &= (s_0 s_2 + s_1 s_1 + s_2 s_0)\, \omega = \Omega^3, \\ s_N^2 &= 0 \text{ für } N > 2. \end{aligned}$$

Ist allgemeiner $s^n = s * \cdots * s$ die n-fache Faltung von s mit sich selbst, so behaupten wir

$$s_N^n = (-1)^N \binom{n}{N} \Omega^{n+1}. \tag{9}$$

Der Beweis folgt durch Schluß von n auf $n + 1$; sei die Formel (9) für ein festes n bereits bewiesen (sie ist richtig für $n = 1$ und $n = 2$). Dann haben wir

$$\begin{aligned} s_N^{n+1} &= \sum_{k=0}^{N} s_k^n s_{N-k} \omega = s_N^n s_0 \omega + s_{N-1}^n s_1 \omega \\ &= (s_N^n - s_{N-1}^n)\, \Omega = (-1)^N \Omega^{n+2} \left[\binom{n}{N} + \binom{n}{N-1}\right] \\ &= (-1)^N \Omega^{n+2} \binom{n+1}{N}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Die Faltungsprodukte von l mit sich selbst lassen sich durch stetige Funktionen von t darstellen. Dies kann man mit Hilfe der in Nr. 1 durchgeführten Überlegungen direkt einsehen, indem man die Äquivalenzrelation $\cong$ heranzieht; man kann aber auch durch Ausrechnung der Summen (4) bestätigen. Für die n-fache Faltung l^n von l mit sich selbst folgt

$$l^n(t) \cong \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

---

[1]) Man beachte, daß s^2, s^n, l^n usw. nicht Potenzen im üblichen Sinne, sondern „Faltungspotenzen" sind.

Damit haben wir alle Polynome in s und l durch Funktionen dargestellt. Im nächsten Abschnitt wollen wir uns mit gebrochenen Funktionen von s befassen.

5. Rationale Ausdrücke in s.

Es sei $|\alpha| \ll \Omega$; wir wollen eine ω-Treppenfunktion $E(t)$ so bestimmen, daß $E * (s + \alpha\delta) = \delta$, also symbolisch geschrieben

$$E = \frac{\delta}{s + \alpha\delta}$$

gilt. Wir erhalten aus (4), (5), (7) die Bestimmungsgleichungen

$$E_0(\Omega^2 + \alpha\Omega)\,\omega = \Omega, \quad \text{also} \quad E_0 = \frac{\Omega}{\Omega + \alpha},$$

$$E_{N+1}(\Omega^2 + \alpha\Omega)\,\omega - E_N\Omega^2\omega = 0, \quad \text{also} \quad E_{N+1} = \frac{\Omega}{\Omega + \alpha}E_N,$$

mithin

$$E_N = \left(\frac{\Omega}{\Omega + \alpha}\right)^{N+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{\Omega + \alpha}\right)^{N+1}$$
$$= \left(1 - \frac{\alpha}{\Omega + \alpha}\right)^{1 - \alpha N\omega}\left[\left(1 - \frac{\alpha}{\Omega + \alpha}\right)^{\Omega + \alpha}\right]^{N\omega}.$$

Für $|\alpha| \ll \Omega$, $t = N\omega \ll \Omega$ ist der erste Faktor unendlich wenig verschieden von 1, der zweite unendlich wenig verschieden von $e^{-\alpha t}$, so daß wir

$$E(t) \cong e^{-\alpha t} \tag{10}$$

haben. Mittels der Faltung kann man daraus in gewohnter Weise Funktionsdarstellungen für alle rationalen Ausdrücke in s herleiten und erhält Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen. Die Behandlung von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen und Systemen von solchen verläuft wie üblich ([2], S. 29—40).

6. Die allgemeine δ-Funktion und ihre Inverse.

Für $t_0 = M\omega$, M ganz, ist $\Delta(t) = \delta(t - t_0)$ eine ω-Treppenfunktion, und man hat

$$\Delta_N = \begin{cases} 0 & \text{für } N < M \\ \Omega & \text{für } N = M \\ 0 & \text{für } N > M. \end{cases}$$

Die Faltung mit einer beliebigen ω-Treppenfunktion f ergibt

$$(\Delta * f)_N = \begin{cases} \Omega f_{N-M}\,\omega = f_{N-M} & \text{für } N \geqq M, \\ 0 & \text{für } N < M. \end{cases}$$

Es ist also $(\Delta * f)(t) = f(t - t_0)$. Die allgemeine δ-Funktion verschiebt die Funktion f um t_0 nach rechts.

Δ ist ein Beispiel für eine ω-Treppenfunktion, welche im Nullpunkt verschwindet: $\Delta_0 = 0$. Um aber trotzdem einen anschaulichen Überblick über das Verhalten der Faltungsinversen G von Δ zu erlangen, ändern wir die Gleichung

$$\Delta * G = \delta$$

unendlich wenig ab, indem wir mit einer unendlich kleinen Zahl $\tilde{\omega}$ schreiben:

$$(\Delta + \tilde{\omega}\delta) * G = \delta.$$

Daraus ergeben sich die Bestimmungsgleichungen

$$\sum_{k=0}^{N} (\Delta_k + \tilde{\omega}\delta_k)\, G_{N-k} = \delta_N,$$

und

$$G_0 = \frac{\Omega}{\tilde{\omega}},$$

$$G_N = 0 \qquad \text{für } 0 < N < M,$$

$$G_M = -\frac{G_0}{\tilde{\omega}} = -\frac{\Omega}{\tilde{\omega}^2},$$

allgemein für jede nichtnegative ganze Zahl n:

$$G_{nM} = (-1)^n \frac{\Omega}{\tilde{\omega}^{n+1}},$$

$$G_N = 0 \qquad \text{für } nM < N < (n+1)\, M.$$

Man sieht also: Ist Δ eine δ-Funktion, die an der Stelle t_0 ihre Unendlichkeitsstelle hat, so ist ihre Faltungsinverse G eine Funktion, die an allen Stellen $n \cdot t_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ unendlich wird, und zwar mit wechselndem Vorzeichen und wachsender Amplitude, und außerhalb dieser Stellen gleich Null ist. Es ist unmöglich, nachträglich $\tilde{\omega}$ gleich Null zu setzen, d. h. man kann nur die Faltungsinverse einer von Δ unendlich wenig verschiedenen Funktion selbst als Funktion darstellen.

7. Potenzreihen in s.

In der Operatorenrechnung von Mikusiński werden auch Potenzreihen in Operatoren erklärt, wobei die n-te Potenz das n-fache Faltungsprodukt des Operators mit sich selbst ist. Dabei können dort aber nur solche Operatoren zugelassen werden, die als Funktionen darstellbar sind. Insbesondere läßt sich etwa der Operator e^{-s} nicht durch die Exponentialreihe erklären. Im Gegensatz dazu können wir hier auch solche Potenzreihen in s erfassen. Wir beweisen den folgenden Satz:

Es sei a_k eine Zahlfolge mit $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, so daß also nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle x konvergiert. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$, wobei s^k das k-fache Faltungsprodukt von s mit sich selbst ist und die Konvergenz der Reihe in s^k als punktweise Konvergenz derjenigen ω-Treppenfunktionen gemeint ist, die durch die Partialsummen der Reihe gegeben sind.

Beweis. Bezeichnen wir den Grenzwert, dessen Existenz zu zeigen ist, mit f, so besteht für f_N nach Einsetzen der Formel (9) die Bedingung

$$f_N = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s_N^k = (-1)^N \Omega \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{k}{N} \Omega^k,$$

und es ist zu zeigen, daß diese Potenzreihe in Ω konvergiert. Dies ist aber der Fall, da ihr Konvergenzradius ∞ ist:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|a_k \binom{k}{N}\right|} \leqq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \sqrt[k]{k^N} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{N!}} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Als Beispiel betrachten wir

$$f(t) = e^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n!}$$

mit

$$f_N = (-1)^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \binom{n}{N} \Omega^{n+1} = \frac{(-1)^N}{N!} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-N)!} \Omega^{n+1},$$

woraus mit $n - N = k$ folgt:

$$f_N = \frac{(-1)^N}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+N}}{k!} \Omega^{k+N+1}$$
$$= \frac{\Omega^{N+1}}{N!} e^{-\Omega}.$$

Man sieht daraus sofort, daß f_N für $N = \Omega$ seinen größten Wert annimmt, weil der beim Übergang von N zu $N+1$ hinzukommende Faktor $\frac{\Omega}{N+1}$ für $N \geqq \Omega$ kleiner als 1, für $N < \Omega$ größer als 1 ist. Der Wert f_Ω selbst ist nach der Stirlingschen Formel näherungsweise gleich $\sqrt{\frac{\Omega}{2\pi}}$.

Die Funktion $f(t) = e^{-s}$ verhält sich wie eine δ-Funktion mit Maximum an der Stelle $t = 1$. Dies weist man am bequemsten dadurch nach, daß man zeigt:

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

ist eine Funktion, die für $t \leqq 1 - \varepsilon$ unendlich klein, für $t \geqq 1 + \varepsilon'$ unendlich wenig von 1 verschieden ist, wobei ε, ε' unendlich klein und positiv sind.

In der Tat folgt sofort

$$h_N = e^{-\Omega} \sum_{n=0}^{N} \frac{\Omega^n}{n!},$$

und diese Zahlen h_N kann man abschätzen:

Sei zunächst $\frac{N}{\Omega} = q = 1 - \varepsilon < 1$; dann ist

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\Omega^n}{n!} = \frac{\Omega^N}{N!}\left(1 + \frac{N}{\Omega} + \frac{N(N-1)}{\Omega^2} + \cdots\right)$$
$$\leqq \frac{\Omega^N}{N!}(1 + q + q^2 + \cdots) = \frac{\Omega^N}{N!} \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Unter Benutzung der Stirlingschen Formel

$$N! > \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N}$$

folgt

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{\Omega^n}{n!}}{e^{\Omega}} < \frac{\Omega^N}{\varepsilon N!\, e^{\Omega}} < \left(\frac{\Omega}{N}\right)^N \frac{1}{e^{\Omega-N}\varepsilon\sqrt{2\pi N}}$$

$$= q^{-N} e^{-(\Omega-N)} \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}$$

$$= \frac{1}{q^{\varepsilon\Omega} e^{\Omega(1-q)} \varepsilon \sqrt{2\pi N}} = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)\Omega} \varepsilon e^{\varepsilon\Omega}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}.$$

Hier ist der zweite Faktor unendlich klein für $N \gg 1$; wir werden zeigen, daß es ein unendlich kleines ε gibt, für das der erste Faktor endlich, nämlich höchstens gleich Eins ist. Damit wird erwiesen sein, daß $h(t)$ für $t \leqq 1 - \varepsilon$ unendlich klein ist.

Für unser gesuchtes ε muß gelten:

$$1 \leqq (1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)\Omega} \varepsilon e^{\varepsilon\Omega},$$

also nach Übergang zu den Logarithmen

$$0 \leqq \Omega(1-\varepsilon) \log(1-\varepsilon) + \log\varepsilon + \varepsilon\Omega$$

$$= \Omega\varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \cdot \frac{1}{6} + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{12} + \cdots\right) + \log\varepsilon.$$

Dies wird sicher erfüllt sein, wenn

$$\frac{|\log\varepsilon|}{\varepsilon^2} \leqq \frac{\Omega}{2}$$

ist. Ein unendlich kleines ε, das dieser Bedingung genügt, läßt sich so konstruieren: Man bestimme ε_n aus der Gleichung

$$\frac{|\log\varepsilon_n|}{\varepsilon_n^2} = \frac{n}{2}.$$

Die reellen ε_n werden für hinreichend große n kleiner als jede positive rationale Zahl; bliebe nämlich etwa $\varepsilon_n > \frac{1}{K}$ für eine natürliche Zahl K, so hätte man

$$\frac{n}{2} = \frac{|\log\varepsilon_n|}{\varepsilon_n^2} \leqq K^2 \log K,$$

woraus bei wachsendem n ein Widerspruch folgte. $\varepsilon = \varepsilon_\Omega = \lim\limits_{n=\Omega} \varepsilon_n$ ist daher unendlich klein und erfüllt unsere Bedingungen.

Ganz entsprechend beweist man die Existenz eines unendlich kleinen ε', so daß $h(t)$ für $t \geqq 1 + \varepsilon'$ unendlich wenig von 1 verschieden ist.

Damit ist nachgewiesen, daß e^{-s} eine δ-Funktion ist, deren Maximum bei $t = 1$ liegt.

Man kann auch für Operatoren, für die bei Mikusiński überhaupt keine Darstellung als Faltungsquotient existiert, hier Funktionsdarstellungen angeben. Ein Beispiel ist

$$g(t) = \cos s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^{2n}}{(2n)!}.$$

Man berechnet wie vorher

$$g_{2M} = \frac{(-1)^M \Omega^{2M+1}}{(2M)!} \cos\Omega; \quad g_{2M+1} = \frac{(-1)^M \Omega^{2M+2}}{(2M+1)!} \sin\Omega.$$

8. Operatoren als Äquivalenzklassen aus ω-Treppenfunktionen.

Um den Anschluß an die Operatorenrechnung von Mikusiński zu vollziehen, wollen wir aus unseren ω-Treppenfunktionen Äquivalenzklassen bilden. Das Verfahren ist also ganz ähnlich wie die Einführung der Distributionen als Klassen von normalen Funktionen in Teil I.

Wir definieren: Zwei ω-Treppenfunktionen $f(t)$, $g(t)$ heißen *äquivalent im Sinne der Operatorenrechnung*, wenn es eine im gewöhnlichen Sinne stetige Funktion $c(t) \neq 0$ und eine monoton nicht fallende unendlich kleine Funktion $\varepsilon(t)$ gibt, so daß

$$(11) \qquad | c * (f - g)(t) | \leqq \varepsilon(t)$$

für alle endlichen positiven t gilt. Wir schreiben dann $f \underset{\mathrm{Op}}{\sim} g$.

($c(t)$ ist dabei die stetige Fortsetzung einer für alle nichtnegativen reellen t reellwertigen und im gewöhnlichen Sinne stetigen Funktion, und das Faltungsintegral ist im Sinne der Ω-Analysis zu nehmen.)

Ist $f(t)$ selbst überall unendlich klein, so gilt offenbar $f \underset{\mathrm{Op}}{\sim} 0$; man setze $c(t) \equiv 1$. Allgemeiner gilt $f \underset{\mathrm{Op}}{\sim} 0$ auch dann, wenn k-maliges Integrieren von f auf eine unendlich kleine Funktion führt: Dieses k-fache Integral läßt sich ja durch die Faltung von f mit $\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$ ersetzen. So folgt z. B. mittels zweimaliger Integration für die ω-Treppenfunktion f mit $f_0 = \frac{\Omega}{2}$, $f_N = (-1)^N \Omega$ für $N > 0$ die Äquivalenz $f \underset{\mathrm{Op}}{\sim} 0$. Ebenfalls genügt zweimalige Integration, um aus den in Nr. 7 bewiesenen Tatsachen $e^{-s} \underset{\mathrm{Op}}{\sim} \delta(t-1)$ zu folgern.

Wir müssen noch zeigen, daß die Relation $\underset{\mathrm{Op}}{\sim}$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dabei ist lediglich die Transitivität nicht ganz trivial; sei also

$$f \underset{\mathrm{Op}}{\sim} g, \qquad g \underset{\mathrm{Op}}{\sim} h,$$

d. h. mit nicht identisch verschwindenden Funktionen $c_1(t)$, $c_2(t)$ und unendlich kleinen Funktionen $\varepsilon_i(t)$ gelte

$$| c_1 * (f - g) | \leqq \varepsilon_1(t), \qquad | c_2 * (g - h) | \leqq \varepsilon_2(t).$$

Dann verschwindet nach dem Satz von Titchmarsh auch $c_1 * c_2$ nicht identisch (diesen Satz benötigen wir hier nur, weil wir unseren Aufbau mit dem von Mikusiński vergleichen wollen, welcher wesentlich auf diesem Satze beruht), und es folgt mit

$$\varepsilon_3(t) = \int_0^t | c_2(\tau) | \, d\tau \cdot \varepsilon_1(t) + \int_0^t | c_1(\tau) | \, d\tau \cdot \varepsilon_2(t)$$

$$| c_1 * c_2 * (f - h) | \leqq \varepsilon_3(t),$$

also $f \underset{\mathrm{Op}}{\sim} h$.

Die Äquivalenzklassen zu dieser Relation nennen wir Operatoren.

Es ist natürlich noch zu zeigen, daß diese Benennung berechtigt ist[2]). Dazu sei an die Mikusińskische Konvergenzdefinition erinnert ([2], S. 132ff.); eine Folge von Operatoren p_n konvergiert danach gegen einen Operator p, wenn es einen Operator $q \neq 0$ gibt, so daß qp_n, qp stetige Funktionen sind und qp_n gleichmäßig in jedem endlichen Intervall („fast gleichmäßig") gegen qp konvergiert. Dabei ist es keine Einschränkung

[2]) Für die folgenden Überlegungen setzen wir die Kenntnis des Buches [2] voraus und verwenden dieselben Bezeichnungen.

der Allgemeinheit, q selbst als stetige Funktion vorauszusetzen, weil jedenfalls $q = \frac{r}{c}$ mit stetigen Funktionen r, c und dann auch $cqp_n = rp_n$ fast gleichmäßig gegen die Funktion rp konvergente stetige Funktionen sind. Man kann zeigen, daß ein Operator p stets in diesem Sinne als Grenzwert von Funktionen $p_n(t)$ erhalten werden kann, und man kann sagen: Die Operatoren p von Mikusiński sind Klassen von Funktionenfolgen $p_n(t)$, wobei zwei Folgen den gleichen Operator definieren, wenn die Differenzenfolge nach Faltung mit einer geeigneten stetigen Funktion $c(t)$, welche nicht identisch verschwindet, fast gleichmäßig gegen Null geht.

Dies ist nun aber genau dieselbe Klassenbildung wie die durch unsere Relation $\underset{\mathrm{Op}}{\sim}$ gegebene. Ist $f(t) = f_\Omega(t_\Omega)$ eine ω-Treppenfunktion, so ist sie wie jede normale Funktion Limes für $n = \Omega$ einer Folge $f_n(t_n)$ von reellen Funktionen. Die Bedingung (11) besagt nun aber gerade, daß die Differenzen $f_n - g_n$ nach Faltung mit einer stetigen reellen Funktion $c(t) \neq 0$ im Sinne des klassischen Konvergenzbegriffs fast gleichmäßig gegen Null gehen. Denn in jedem endlichen t-Intervall $0 \leqq t \leqq T$ ist $c * (f_\Omega - g_\Omega)$ durch die unendlich kleine Zahl $\varepsilon_\Omega(T)$ beschränkt, und unendlich klein bedeutet ja genau, daß die Komponentenfolge $\varepsilon_n(T)$ im klassischen Sinne eine Nullfolge ist.

Es gibt übrigens in unserem Aufbau Operatoren, z. B. $\cos s$, welche in Mikusińskis Darstellung keinen Sinn haben.

Die Äquivalenzrelation $\underset{\mathrm{Op}}{\sim}$ ist verträglich mit der additiven und der multiplikativen Struktur: Wenn $f \underset{\mathrm{Op}}{\sim} \bar{f}$, $g \underset{\mathrm{Op}}{\sim} \bar{g}$ ist, so ist $f + g \underset{\mathrm{Op}}{\sim} \bar{f} + \bar{g}$ und $f * g \underset{\mathrm{Op}}{\sim} \bar{f} * \bar{g}$. Der Beweis kann wie in 1. geführt werden. Für die Faltungsquotienten aus f, g und $\bar{f}, \bar{g}$ braucht Äquivalenz nicht zu gelten, wie man am Beispiel $f = \delta$, $\bar{f} = \delta(1 + \omega)$, $g = \bar{g} = \omega\delta$ sieht.

Literatur.

[1] *D. Laugwitz*, Anwendungen unendlich kleiner Zahlen. I. Zur Theorie der Distributionen. Journal f. reine u. angew. Mathematik **207** (1961), 53—60.
[2] *J. Mikusiński*, Operatorenrechnung. Berlin 1957.
[3] *C. Schmieden* und *D. Laugwitz*, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Math. Z. **69** (1958), 1—39.

Eingegangen am 2. April 1960.

Reciprocities in Gauss' and Eisenstein's number fields.

By *Tomio Kubota* in Nagoya (Japan).

The equation

$$Y^2 = 4(X^3 - X) \tag{1}$$

defines an elliptic curve C with complex multiplication, whose endomorphism ring is the ring $\mathfrak{o}_F$ of integers of Gauss' number field $F = \boldsymbol{Q}(i)$, where $\boldsymbol{Q}$ is the rational number field. The curve C determines a "Grössencharakter" of the ideal group of F. Namely, let (ν) be an integral ideal of F. Then, under certain auxiliary conditions, (ν) gives in the sense of class field theory the Artin automorphism σ_ν of the division points of C. The automorphism σ_ν is attained by an endomorphism $\nu^* \in \mathfrak{o}_F$ and the mapping $(\nu) \to \nu^*$ becomes a Grössencharakter. Furthermore, it is known that the character ν^* is also derived from the zeta-function of C.

On the other hand, let f be an elliptic function with the fundamental period $[1, i]$ which has $0, \frac{1}{2}(1+i)$ as simple zeros and $\frac{1}{2}, \frac{i}{2}$ as simple poles. Required moreover the property

$$f(z)\, f(z + \tfrac{1}{2}) = 1, \tag{2}$$

the function f is unique except the constant factor ± 1. For any integer $\nu \neq 0$ of $\mathfrak{o}_F$, we set

$$\nu_* = \prod_{\substack{\alpha \bmod \nu \\ \alpha \not\equiv 0 (\nu)}} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right), \tag{3}$$

where the product is extended over all residue classes different from $0 \bmod \nu$. For a unit ν, the right hand side of (3) becomes a product over the empty set. We always regard such a product as 1. It is obvious that ν_* depends only on the ideal (ν).

Now, the main aim of the present paper is to investigate the quantity ν_*. We shall show that the mapping $(\nu) \to \nu_*$ gives also a Grössencharakter which is in intimate connection with ν^* above, and that the relationship between these two characters is completely described by Gauss' reciprocity law for biquadratic residues.

The character ν_* is then explicitely written as the product of ν^* by a certain congruence character of F.

Incidentally, we can in turn deduce a special case of the Gauss' reciprocity from those parts of our results which follow only from the theory of complex multiplication, as was done by Fueter [8] in the case of quadratic residues.

We shall also obtain similar results on Eisenstein's number field $\mathbf{Q}(\varrho)$ with $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

An essential point of our investigation is to get a reciprocity relation (18) or (43) between ν^* and ν_*, which is carried out by the modern theory of complex multiplication and by a generalization of so-called Gauss' lemma in the theory of the power residues.

1. Let C be the elliptic curve defined by (1). We identify an endomorphism of C with an element of the ring $\mathfrak{o}_F$ of integers in $F = \mathbf{Q}(i)$. If we set

$$\wp\left(\frac{1}{2}\right) = e_1, \quad \wp\left(\frac{1+i}{2}\right) = e_2 = 0, \quad \wp\left(\frac{1}{2}\right) = e_3, \tag{4}$$

then we have $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z)$, $g_2 = 4e_3^2$ and

$$\left(\frac{\wp'(z)}{\sqrt{e_3^3}}\right)^2 = 4\left(\frac{\wp(z)}{e_3}\right)^3 - 4\left(\frac{\wp(z)}{e_3}\right), \tag{5}$$

where $\wp(z)$ means $\wp(z;\, 1, i)$. This shows that we may set

$$X = \frac{\wp(z)}{e_3}, \quad Y = \frac{\wp'(z)}{e_3\sqrt{e_3}}. \tag{6}$$

The points of C are in one to one correspondence with complex numbers modulo the module generated by 1 and i, and the functions on C are identified with elliptic functions with the fundamental period $[1, i]$. For a complex number z, we denote by (z) the corresponding point of C. The endomorphism of $\nu \in \mathfrak{o}_F$ is represented by $(z) \to (\nu z)$. As a consequence of the addition theorem of elliptic functions, every endomorphism of $\mathfrak{o}_F$ is defined over F in the sense of algebraic geometry.

Consider the divisor $\mathfrak{d} = (0) + \left(\frac{1+i}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{i}{2}\right)$ on C. Since it is F-rational, there is a function f_0 on C such that f_0 is defined over F and that $(f_0) = \mathfrak{d}$. Because of the well known relations

$$(X) = -2(0) + 2\left(\frac{1+i}{2}\right), \quad (Y) = -3(0) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right),$$

one such f_0 is given by $\frac{X}{Y}$.

We see from the definition of $\mathfrak{d}$ that $f_0(z)\, f_0(z + \frac{1}{2}) = K$ is a constant. We now propose to determine the constant K.

Set $z = -\frac{1}{4}$. Then, since f_0 is an odd function, we have $-f_0(\frac{1}{4})^2 = K$. On the other hand, we have

$$f_0^2 = \left(\frac{X}{Y}\right)^2 = \frac{X}{4(X^2-1)} \tag{7}$$

and it follows from the addition theorem and from $g_3 = 0$ that

$$\wp(2z) = \frac{(\wp(z)^2 + e_3^2)^2}{4\wp(z)\,(\wp(z)^2 - e_3^2)}$$

and

$$X(2z) = \frac{(X(z)^2+1)^2}{4\,X(z)\,(X(z)^2-1)}.$$

Set here $z = \frac{1}{4}$ and $X(\frac{1}{4}) = \xi$. Then we have

$$X(2z) = X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e_3}\,\wp\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e_1}{e_3} = -1$$

because of $e_2=0$, $e_1+e_2+e_3=0$. Thus $-(\xi^2+1)^2=4\xi(\xi^2-1)$, $\xi^4+4\xi^3+2\xi^2-4\xi+1=0$, $(\xi^2+2\xi-1)^2=0$ and $\xi=-1\pm\sqrt{2}$. It follows from (7) and from $4(\xi^2-1)=-8\xi$ that

$$f_0\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\xi}{-8\xi}=-\frac{1}{8}.$$

Hence $K=\frac{1}{8}$.

If we set

$$f(z)=2\sqrt{2}f_0(z)=2\sqrt{2}\frac{X}{Y} \tag{8}$$

and

$$f(z)=\sqrt{2}f_1(z), \tag{9}$$

then $f(z)$ satisfies (2) and $f_1(z)$ is a function defined over F with $(f_1)=\mathfrak{d}$.

2. Let $\nu\in\mathfrak{o}_F$ be an integer of F. If $\alpha\in\mathfrak{o}_F$ is prime to ν, then $X\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^2$ generates the "ν-Strahl" class field S_ν over F. On the other hand, if g is any function on C defined over F, then $g\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)(\alpha\in\mathfrak{o}_F)$ belongs to the field S'_ν of ν-division points of C. It is known hat $S'_\nu>S_\nu$ and S'_ν/F is abelian (Deuring [5], Taniyama [15]). The curve C is reductible modulo every prime ideal $\mathfrak{p}$ of F different from $\mathfrak{l}$ with $\mathfrak{l}^2=2$ (Deuring [3], [6], Hasse [12]).

Let $\widetilde{C}$ be the curve obtained by the reduction of C mod. $\mathfrak{p}=(\pi)$ $(\mathfrak{p}\neq\mathfrak{l})$ and $\widetilde{\omega}$ be the endomorphism of $\widetilde{C}$ induced by the automorphism $\widetilde{z}\to\widetilde{z}^{N\mathfrak{p}}$ of the algebraic closure of $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}$. It follows then from the theory of complex multiplication that there is an endomorphism $\pi^*\in\mathfrak{o}_F$ of C such that the reduction $\widetilde{\pi}^*$ of π^* is equal to $\widetilde{\omega}$ (Hasse [10], Weil [19]). We call π^* the Frobenius endomorphism of $\mathfrak{p}$. The Frobenius endomorphism π^* is uniquely determined by $\mathfrak{p}$.

Assume now that $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{l}$ and ν is prime to $\mathfrak{p}$. If $\mathfrak{P}$ is any divisor of $\mathfrak{p}$ in S'_ν, then, since the numbers of ν-division points of C and of $\widetilde{C}$ are equal and since the reduction modulo $\mathfrak{P}$ maps the set of ν-division points of C onto that of $\widetilde{C}$, different ν-division points P_ν, P'_ν of C have different reductions $\widetilde{P}_\nu$, $\widetilde{P}'_\nu$ modulo $\mathfrak{P}$ (Deuring [5]). Therefore, the Frobenius automorphism $\sigma_\mathfrak{p}$ of $\mathfrak{p}$ with respect to S'_ν/F, which possesses the property $\widetilde{P}_\nu^{\sigma_\mathfrak{p}}=\widetilde{\omega}\widetilde{P}_\nu$, is uniquely determined. This shows that $\mathfrak{p}$ is unramified in S'_ν.

It follows from the definition that $\pi^*P_\nu=P_\nu^{\sigma_\mathfrak{p}}$ and

$$g\left(\frac{\pi^*\alpha}{\nu}\right)=g\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\sigma_\mathfrak{p}}, \tag{10}$$

whenever g is a function on C defined over F and ν is prime to $\mathfrak{p}$. More generally, let $\mu\in\mathfrak{o}_F$ be any integer prime to 2ν and $(\mu)=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_s$, $\mathfrak{p}_i=(\pi_i)$ be its prime ideal decomposition. If we denote the Artin automorphism by $\sigma_\mu=\sigma_{\mathfrak{p}_1}\cdots\sigma_{\mathfrak{p}_s}$, then we have

$$g\left(\frac{\mu^*\alpha}{\nu}\right)=g\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\sigma_\mu} \tag{11}$$

with $\mu^*=\pi_1^*\cdots\pi_s^*$. Let us call μ^* the Artin endomorphism of (μ).

A fundamental theorem of the complex multiplication shows that $\mu^*=\varepsilon\mu$ with a root ε of unity in $\mathfrak{o}_F$ (Hasse [10], Deuring [4], Shimura [14], Taniyama [15]). Further-

more, the mapping $(\mu) \to \mu^*$ is a Grössencharakter of the ideal group of F (Deuring [6], Taniyama [15], Weil [18]).

3. We now formulate a generalization of Gauss' lemma. The result of this § is already obtained by Reichardt [13]. But we repeat it for the sake of convenience.

Lemma. *Let K be an algebraic number field containing all m-th roots of unity and $\mathfrak{a}$ be an integral ideal of K prime to m. Denote by M a set of representatives mod $\mathfrak{a}$ such that $\{0, M, \zeta_m M, \ldots, \zeta_m^{m-1} M\}$ is a complete set of representatives mod. $\mathfrak{a}$, where ζ_m is an m-th root of unity. Furthermore, for an integer α prime to $\mathfrak{a}$ of K and for every $\mu \in M$, define an m-th root $\zeta_{\alpha,\mu}$ of unity by the relation $\alpha\mu \equiv \zeta_{\alpha,\mu}\mu'$ (mod. $\mathfrak{a}$) $(\mu' \in M)$. Then we have*

$$\prod_{\mu \in M} \zeta_{\alpha,\mu} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)_m .$$

Proof. Let $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{a_r}$ be the ideal decomposition of $\mathfrak{a}$ and let $(c) = (c_1, \ldots, c_r)$ be a set of rational integers such that $0 \leqq c_i \leqq a_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ and not every c_i is equal to a_i. We denote by $M_{(c)}$ the set of all elements in M which are, for every i, divisible by $\mathfrak{p}_i^{c_i}$ but not by $\mathfrak{p}_i^{c_i+1}$ whenever $c_i < a_i$. We have $M = \bigcup_{(c)} M_{(c)}$ and $M_{(c)} \cap M_{(c')} = \Phi$ for $c \neq c'$. Let $\omega_{(c)}$ be an integer of K such that the ideal decomposition of $\omega_{(c)}$ is $\omega_{(c)} = \mathfrak{p}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{c_r}\mathfrak{m}$, $(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r, \mathfrak{m}) = 1$. Then for every $\mu \in M_{(c)}$, an integer $\tilde{\mu}$ is uniquely determined mod. $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$ by the condition $\mu \equiv \tilde{\mu}\omega_{(c)}$ (mod. $\mathfrak{a}$), where we set $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{c_r}$. Choose a $\tilde{\mu}$ for every $\mu \in M_{(c)}$ and let $N_{(c)}$ be the set of all the $\tilde{\mu}$. Every element $\tilde{\mu}$ is prime to $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$ and, if $\tilde{\mu}_1 \equiv \tilde{\mu}_2 \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$, then $\mu_1 \equiv \mu_2$ (mod $\mathfrak{a}$). Therefore the elements of $N_{(c)}$ are mutually incongruent mod $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$. If γ is an integer of K prime to $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$, then we have $\gamma\omega_{(c)} \equiv \zeta_0\mu'$ (mod $\mathfrak{a}$) for suitable m-th root ζ_0 of unity and for a $\mu' \in M$, whence $\gamma\omega_{(c)} \equiv \zeta_0\tilde{\mu}'\omega_{(c)}$ (mod $\mathfrak{a}$). Since $(\gamma\omega_{(c)}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$, we have $\gamma \equiv \zeta_0\tilde{\mu}' \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$. If in particular we set $\gamma = \alpha\tilde{\mu}$, then $\alpha\mu \equiv \zeta_{\alpha,\mu}\mu'$ (mod $\mathfrak{a}$) yields $\alpha\tilde{\mu} \equiv \zeta_{\alpha,\mu}\tilde{\mu}' \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$. Moreover, the relation $\tilde{\mu}_1 \equiv \zeta\tilde{\mu}_2 \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$, $\zeta^m = 1$, cannot hold between different elements $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ of $N_{(c)}$. For, $\tilde{\mu}_1 \equiv \zeta\tilde{\mu}_2 \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$ implies $\mu_1 \equiv \zeta\mu_2$ (mod $\mathfrak{a}$), which is impossible. Thus, we see that $\{N_{(c)}, \zeta_m N_{(c)}, \ldots, \zeta_m^{m-1} N_{(c)}\}$ is just a set of complete representatives of prime residue classes mod $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$.

Now, for $\tilde{\mu} \in N_{(c)}$, we have $\alpha\tilde{\mu} \equiv \zeta_{\alpha,\mu}\tilde{\mu}' \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$, $\tilde{\mu}' \in N_{(c)}$. Hence

$$\prod_{\tilde{\mu} \in N_{(c)}} \alpha\tilde{\mu} \equiv \prod_{\tilde{\mu} \in N_{(c)}} \zeta_{\alpha,\mu}\tilde{\mu}' \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right), \qquad \alpha^{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)} \prod_{\mu \in M_{(c)}} \tilde{\mu} \equiv \prod_{\mu \in M_{(c)}} \zeta_{\alpha,\mu} \prod_{\mu \in M_{(c)}} \tilde{\mu}' \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$$

and

$$\alpha^{\frac{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)}{m}} \equiv \prod_{\mu \in N_{(c)}} \zeta_{\alpha,\mu} \left(\mathrm{mod}\, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right),$$

where $\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)$ denotes Euler's function. Let $\mathfrak{p}$ be a prime divisor of $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$. If $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$ is also divisible by another prime ideal $\mathfrak{p}'$, then $\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) = (N\mathfrak{p} - 1)(N\mathfrak{p}' - 1)h$ with some natu-

ral number h. Hence

$$\alpha^{\frac{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)}{m}} = \alpha^{\frac{N\mathfrak{p}'-1}{m}h(N\mathfrak{p}-1)} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

whence

$$\prod_{\mu \in M_{(c)}} \zeta_{a,\mu} = 1.$$

If, however, $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$ is a power $\mathfrak{p}^a$ of a prime ideal, then

$$\alpha^{\frac{\varphi\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right)}{m}} = \alpha^{\frac{\varphi(\mathfrak{p}^a)}{m}} = \alpha^{\frac{N\mathfrak{p}^{a-1}(N\mathfrak{p}-1)}{m}} \equiv \alpha^{\frac{N\mathfrak{p}-1}{m}} \pmod{\mathfrak{p}},$$

whence

$$\prod_{\mu \in M_{(c)}} \zeta_{a,\mu} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m.$$

So we get

$$\prod_{\mu \in M} \zeta_{a,\mu} = \prod_{(c)} \prod_{\mu \in M_{(c)}} \zeta_{a,\mu} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_1}\right)_m^{a_1} \cdots \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_r}\right)_m^{a_r} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)_m,$$

which completes the proof.

4. Let ν be an integer of F prime to 2. Since $\nu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}}$, we have $\nu\mathfrak{d} = \mathfrak{d}$. Hence

$$(f(\nu z)) = \nu^{-1}\mathfrak{d} = \sum_{\alpha \bmod \nu} \mathfrak{d}_{\frac{\alpha}{\nu}},$$

where $\mathfrak{d}_{\frac{\alpha}{\nu}}$ is the translation of $\mathfrak{d}$ by $\frac{\alpha}{\nu}$. Therefore there is a constant ε_ν such that

$$\varepsilon_\nu f(\nu z) = \prod_{\alpha \bmod \nu} f\left(z + \frac{\alpha}{\nu}\right), \tag{12}$$

α running over all residue classes mod. ν.

We have $\nu = 1 + (a + bi)(1 + i)$ with rational integers a, b, and (2) shows

$$f\left(\nu\left(z + \frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\nu z + \frac{1}{2} + \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}i\right) = f\left(\nu z + \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}i\right).$$

The last term is equal to $f(\nu z)$ or $f\left(\nu z + \frac{1+i}{2}\right)$ according as $a - b \equiv 0 \pmod 2$ or not. Furthermore, from the theory of elliptic functions, it follows that $f\left(\nu z + \frac{1+i}{2}\right) = -f(\nu z)$. So we have $f(\nu(z + \frac{1}{2})) = \pm f(\nu z)^{-1}$. Replacing the variable z in (12) by $z + \frac{1}{2}$, we obtain

$$\pm\, \varepsilon_\nu f(\nu z)^{-1} = \prod_{\alpha \bmod \nu} f\left(z + \frac{\alpha}{\nu}\right)^{-1}. \tag{13}$$

The formulas (12) and (13) imply $\varepsilon_\nu^2 = \pm 1$. Therefore ε_ν is a 4-th root of unity. We set $\nu_* = \varepsilon_\nu \nu$.

Dividing both sides of the formula (12) by $f(z)$ and making z tend to 0, we have

$$\nu_* = \prod_{\substack{\alpha \bmod \nu \\ \alpha \not\equiv 0(\nu)}} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) = 4^{\frac{N\nu-1}{4}} \prod_{\substack{\alpha \bmod \nu \\ \alpha \not\equiv 0(\nu)}} f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right), \tag{14}$$

the product being extended over all residue classes of ν except 0.

Let M be a set of representatives mod. ν such that $\{0, M, iM, -M, -iM\}$ is a complete set of representatives mod. ν. Since

$$f(iz) = if(z), \tag{15}$$

the formula (14) gives

$$\left(\prod_{\alpha \in M} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)\right)^4 = \prod_{\alpha \in M} (-1) f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) f\left(\frac{i\alpha}{\nu}\right) f\left(\frac{-\alpha}{\nu}\right) f\left(\frac{-i\alpha}{\nu}\right) = (-1)^{\frac{N\nu-1}{4}} \nu_*.$$

This yields

$$\sqrt[4]{\nu_*} = \zeta_8^{\frac{N\nu-1}{4}} \prod_{\alpha \in M} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) = (\zeta_8\sqrt{2})^{\frac{N\nu-1}{4}} \prod_{\alpha \in M} f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right), \tag{16}$$

where $\zeta_8 = e^{\frac{2\pi i}{8}}$, and $\sqrt[4]{\nu_*}$ denotes a 4-th root of ν_*. Obviously ν_* depends only on the ideal (ν).

Now, let μ be an integer of F prime to 2ν and μ^* be the Artin endomorphism of (μ). Then, denoting by σ_μ the Artin automorphism of (μ), it follows from (11) and (16) that

$$\sqrt[4]{\nu_*} = \left((\zeta_8\sqrt{2})^{\frac{N\nu-1}{4}}\right)^{\sigma_\mu} \prod_{\alpha \in M} f_1\left(\frac{\mu^*\alpha}{\nu}\right). \tag{17}$$

Furthermore, we have

$$\prod_{\alpha \in M} f_1\left(\frac{\mu^*\alpha}{\nu}\right) = \left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_4 \prod_{\alpha \in M} f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)$$

because of (15) and the lemma of § 3. Since the power residue symbol $\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)_4$ is defined by $\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)_4 = \sqrt[4]{\gamma}^{\,\sigma_\mu - 1}$ for $\gamma \in F$ prime to μ and since $\zeta_8\sqrt{2}$ is in F, the division of (17) by (16) gives

$$\left(\frac{\nu_*}{\mu}\right)_4 = \left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_4. \tag{18}$$

This reciprocity relation is valid for any μ, $\nu \in \mathfrak{o}_F$ with $(\mu, 2) = (\nu, 2) = (\mu, \nu) = 1$.

5. We propose to prove that the mapping $(\nu) \to \nu_*$ defines a Grössencharakter. For two integers ν, $\nu' \in \mathfrak{o}_F$ prime to 2, we have

$$\varepsilon_{\nu\nu'} f(\nu\nu' z) = \prod_{\alpha \bmod \nu\nu'} f\left(z + \frac{\alpha}{\nu\nu'}\right).$$

On the other hand

$$\begin{aligned} f(\nu\nu' z) = f(\nu(\nu' z)) &= \varepsilon_\nu^{-1} \prod_{\beta \bmod \nu} f\left(\nu' z + \frac{\beta}{\nu}\right) \\ &= \varepsilon_\nu^{-1} \prod_{\beta \bmod \nu} f\left(\nu'\left(z + \frac{\beta}{\nu\nu'}\right)\right) \\ &= \varepsilon_\nu^{-1} \prod_{\beta \bmod \nu} \left(\varepsilon_{\nu'}^{-1} \prod_{\gamma \bmod \nu'} f\left(z + \frac{\beta}{\nu\nu'} + \frac{\gamma}{\nu'}\right)\right) \\ &= \varepsilon_\nu^{-1} \varepsilon_{\nu'}^{-N\nu} \prod_{\beta,\gamma} f\left(z + \frac{\beta + \nu\gamma}{\nu\nu'}\right). \end{aligned}$$

If β and γ move respectively mod. ν and ν', then $\beta + \nu\gamma$ moves over a complete set of representatives mod. $\nu\nu'$, whence $\varepsilon_{\nu\nu'} = \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu'}^{N\nu} = \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu'}$. Therefore ν_* is in fact a character. It remains to prove that $\nu \to \varepsilon_\nu$ defines a congruence character.

For every $\alpha \in \mathfrak{o}_F$, the function $\dfrac{f_1(\alpha z)}{f_1(z)}$ is invariant by every automorphism of C, i. e., $\dfrac{f_1(\alpha i z)}{f_1(iz)} = \dfrac{f_1(\alpha z)}{f_1(z)}$. This means that $\dfrac{f_1(\alpha z)}{f_1(z)}$ is a rational function of X^2 defined over F. So the quantity $\dfrac{f_1\left(\dfrac{\alpha\gamma}{\nu}\right)}{f_1\left(\dfrac{\gamma}{\nu}\right)}$ belongs to the ν-Strahl class field S_ν for every $\gamma \in \mathfrak{o}_F$ which is not divisible by ν. By the same reason $f_1\left(\dfrac{\alpha}{\nu}\right)^4$ also belongs to S_ν.

Assume that $N\nu - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ and that ν is $\mathfrak{l}$-primary with respect to the exponent 4, i. e., $\mathfrak{l}$ is unramified in $F\left(\sqrt[4]{\nu}\right)/F$. This is certainly the case whenever $\nu \leqq 1 \pmod 8$. Then (16) gives

$$\sqrt[4]{\nu}\sqrt[4]{\varepsilon_\nu} = (\zeta_8\sqrt{2})^{\frac{N\nu-1}{4}} f_1\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{N\nu-1}{4}} \prod_{\alpha \in M} \frac{f_1\left(\dfrac{\alpha}{\nu}\right)}{f_1\left(\dfrac{1}{\nu}\right)}. \tag{19}$$

By the assumption the right hand side of (19) as well as $\sqrt[4]{\nu}$ belongs to an overfield of F in which $\mathfrak{l}$ is unramified, so $F(\sqrt[4]{\varepsilon_\nu})$ must be a field in which $\mathfrak{l}$ is unramified. Hence we have $\varepsilon_\nu = 1$, which completes the proof.

6. In this § we notice that a special case of the reciprocity of the 4-th power residue symbol in $F = Q(i)$ follows immediately from what we have hitherto obtained. Let μ, ν be two integers in F prime to 2 such that $(\mu, \nu) = 1$ and $\nu \equiv 1 \pmod 8$. Then, (18) shows

$$\left(\frac{\nu_*}{\mu}\right)_4 \left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_4^{-1} = 1. \tag{20}$$

It follows from the results of § 5 that $\nu_* = \nu$. On the other hand, μ^* is a product of μ by a power of i (cf. § 2), and we have $\left(\dfrac{i}{\nu}\right)_4 = 1$. So we have

$$\left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_4 = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_4.$$

Thus we obtain

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_4 \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_4^{-1} = 1, \quad ((\mu, \nu) = (\mu, 2) = 1, \ \nu \equiv 1 \pmod 8). \tag{21}$$

It was shown by Fueter [8] that, for quadratic residues, a similar reciprocity law is obtained also by means of complex multiplication in every imaginary quadratic number field.

7. From now on we use the class field theory, or at least all the properties of the power residue symbols, and show that a complete relationship between two Grössencharakters ν^* and ν_* is described by Gauss' reciprocity law.

Because of (18), we have

$$\left(\frac{\nu_*}{\mu}\right)_4 \left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_4^{-1} = 1, \tag{22}$$

for any integers μ, ν with $(\mu, 2) = (\nu, 2) = (\mu, \nu) = 1$.

Now, for an integer ν of F prime to 2, denote by $\hat{\nu}$ the generator of the ideal (ν) such that $\hat{\nu} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$. The number $\hat{\nu}$ is uniquely determined for every ν and $(\nu) \to \hat{\nu}$ also determines a Grössencharakter. Gauss' reciprocity law, in its most general formulation, asserts then

$$\left(\frac{\hat{\nu}}{\mu}\right)_4 \left(\frac{\hat{\mu}}{\nu}\right)_4^{-1} = (-1)^{\frac{N\nu-1}{4}\frac{N\mu-1}{4}} \tag{23}$$

for any $\mu, \nu \in \mathfrak{o}_F$ with $(2, \mu) = (2, \nu) = (\mu, \nu) = 1$. Set $\mu^* = \hat{\mu}\theta_\mu$, $\nu_* = \hat{\nu}\delta_\nu$. Then (22) and (23) imply

$$\left(\frac{\delta_\nu}{\mu}\right)_4 \left(\frac{\theta_\mu}{\nu}\right)_4^{-1} = (-1)^{\frac{N\nu-1}{4}\frac{N\mu-1}{1}}, \tag{24}$$

which states a complete relationship between μ^* and ν_*. As the Grössencharakter μ^* is also derived from the zeta-function of C, the results of Davenport-Hasse [2] can be applied here. Among others, we see that, if $\mu = \pi$ is a prime number of F prime to 2, then π^* is a Jacobi sum of the following form (cf. also Hasse [11], Weil [18]):

$$\pi^* = -\sum_{\substack{u \bmod \pi \\ u \not\equiv 0,1\,(\pi)}} \left(\frac{u}{\pi}\right)_4 \left(\frac{1-u}{\pi}\right)_2, \tag{25}$$

which means in particular that we have always $\mu^* \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$, $\theta_\mu = 1$.

Set $\mu = 1 + 2i$ in (24). Then $N(1+2i) - 1 = 4$, $\left(\frac{i}{1+2i}\right)_4 = i$, and therefore $\delta_\nu = (-1)^{\frac{N\nu-1}{4}}$. Thus, we have

$$\nu_* = (-1)^{\frac{N\nu-1}{4}} \nu^* = (-1)^{\frac{N\nu-1}{4}} \hat{\nu}, \tag{26}$$

and the fact that ν_* is a Grössencharakter is again established.

If $\nu = \pi$ is a prime number prime to 2, then it follows from (14), (25) and (26) that

$$\prod_{\substack{a \bmod \pi \\ a \not\equiv 0(\pi)}} f\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) = -(-1)^{\frac{N\pi-1}{4}} \sum_{\substack{u \bmod \pi \\ u \not\equiv 0,1(\pi)}} \left(\frac{u}{\pi}\right)_4 \left(\frac{1-u}{\pi}\right)_2, \tag{27}$$

which is an equality between a cyclotomic sum and a product of division values of an elliptic function. It is to be noted that the assertion of (27) is quite independent of the curve C and concerns only the function f and the prime number π.

8. We now make a corresponding investigation for another elliptic curve defined by

$$Y^2 = 4(X^3 - 1), \tag{28}$$

which will be denoted by C in the sequel.

Everything goes quite similarly as before, except the calculation of elliptic functions in this §. In the rest of this paper, whenever no contrary is stated, we shall always mean by F the field $Q(\varrho)$ $\left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$, and by $\mathfrak{o}_F$ the ring of integers of F.

Since the function $\wp(z) = \wp(z;\, \varrho, \varrho^2)$ satisfies

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_3, \quad \frac{g_3}{e_3^3} = 4, \quad e_3 = \wp\left(\frac{-(\varrho+\varrho^2)}{2}\right) = \wp\left(\frac{1}{2}\right),$$

we may consider

$$X = \frac{\wp(z)}{e_3}, \quad Y = \frac{\wp'(z)}{e_3\sqrt{e_3}}. \tag{29}$$

The curve C has the ring $\mathfrak{o}_F$ as the ring of endomorphisms and the points of C are in one to one correspondence with complex numbers modulo the module generated by 1 and ϱ.

Set $f_0 = \frac{X}{Y}$. Then the divisor $\mathfrak{d} = (f_0)$ of f_0 is

$$\mathfrak{d} = (0) + \left(\frac{-1+\varrho}{3}\right) + \left(\frac{-1+\varrho^2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\varrho}{2}\right) - \left(\frac{\varrho^2}{2}\right)$$

and f_0 satisfies

$$f_0(-\varrho z) = -\varrho f_0(z). \tag{30}$$

Let $\mathfrak{l}$ be the prime ideal of F with $\mathfrak{l}^2 = 3$ and γ_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ be the $2\mathfrak{l}$-division points of C. Then we have $\sum_i \mathfrak{d}_{\gamma_i} = 0$ because each one of the divisors

$$(X) = -2(0) + \left(\frac{-1+\varrho}{3}\right) + \left(\frac{-1+\varrho^2}{3}\right)$$

and

$$(Y) = -3(0) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\varrho}{2}\right) + \left(\frac{\varrho^2}{2}\right)$$

has the same property. Therefore $\prod_i f_0(z + \gamma_i) = K$ is a constant. To determine the constant K, put $z = \frac{1}{6}$. Then $K = \prod_{i=1}^{12} f_0\left(\frac{1}{6} + \gamma_i\right)$. If we set $1 + 6\gamma_i = x_i$, then $x_1, \ldots, x_{12}$ are in one to one correspondence with points $\left(\frac{1}{6} + \gamma_i\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ and are a complete set of representatives in $\mathfrak{o}_F$ of the residue classes mod 6 which are $\equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$. Since the four solutions mod. 6 of $2x \equiv 2 \pmod 6$ in $\mathfrak{o}_F$ are all $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}}$, they are all in $x_1, \ldots, x_{12}$. We may assume that x_1, x_2, x_3, x_4 are the solutions.

Now, no relation such as $x_i \equiv \varrho x_j \pmod 6$ or $x_i \equiv \varrho^2 x_j \pmod 6$ can exist between x_1, x_2, x_3, x_4. For, if for instance $x_i \equiv \varrho x_j \pmod 6$ holds, then it follows from $x_i \equiv \varrho x_j \pmod 3$ and $2x_i \equiv 2x_j \pmod 6$ that $x_i \equiv x_j \pmod 3$ and $\varrho x_j \equiv x_j \pmod 3$, contradicting $(x_j, \mathfrak{l}) = 1$. The relation $2x_i \equiv 2 \pmod 6$ implies $2\left(\frac{1}{6} + \gamma_i\right) = \left(\frac{1}{3}\right)$ on C. Therefore, setting $\frac{1}{6} + \gamma_i = \eta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ and using (30), we have

$$K = \prod_{i=1}^{12} f_0\left(\frac{1}{6} + \gamma_i\right) = \prod_{i=1}^{4} f_0(\eta_i)\, f_0(\varrho\eta_i)\, f_0(\varrho^2\eta_i) = \prod_{i=1}^{4} f_0(\eta_i)^3. \tag{31}$$

The addition theorem of $\wp(z)$ yields

$$X(2z) = \frac{X(z)^4 + 8X(z)}{4X(z)^3 - 4}. \tag{32}$$

For $z = \frac{1}{6}$ the left hand side of (32) is $X\left(\frac{1}{3}\right)$. Since the theory of elliptic functions shows that $\wp\left(\frac{1}{3}\right)$ is the non-zero real root of $3t^4 - 3g_3 t = 3t^4 - 12e_3^3 t = 0$, we have $\wp\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 4e_3^3$ and $X\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{4}$. Setting $X(\eta_i) = \xi_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, (32) shows that ξ_i are the roots of

$$\xi^4 - 4\sqrt[3]{4}\,\xi^3 + 8\xi + 4\sqrt[3]{4} = 0. \tag{33}$$

This gives

$$\left(\xi-\sqrt[3]{4}\right)\left(\xi^3-3\sqrt[3]{4}\,\xi^2-6\sqrt[3]{2}\,\xi-4\right)=0,$$

from which follows that we may set

$$\xi_1=\sqrt[3]{4},\quad \xi_i=\sqrt[3]{4}(1+\alpha+\alpha^2)\qquad (i=2,3,4),$$

where $\alpha^3=2$.

The differentiation of (32) gives

$$\frac{Y(2z)}{Y(z)}=\frac{X(z)^6-20\,X(z)^3-8}{8(X(z)^3-1)^2}. \tag{34}$$

Since the sign of $\sqrt{e_3}$ may be arbitrarily chosen, we may assume $Y(2\eta_i)=Y\left(\frac{1}{3}\right)=2\sqrt{3}$. Hence (34) shows

$$f_0(\eta_i)=\frac{X(\eta_i)}{Y(\eta_i)}=\frac{X(\eta_i)\,Y(2\eta_i)}{2\sqrt{3}\,Y(\eta_i)}=\frac{X(\eta_i)^7-20\,X(\eta_i)^4-8\,X(\eta_i)}{16\sqrt{3}(X(\eta_i)^3-1)^2}$$

and

$$f_0(\eta_i)=\frac{\xi_i}{16\sqrt{3}}\left(1-\frac{18}{\xi_i^3-1}-\frac{27}{(\xi_i^3-1)^2}\right). \tag{35}$$

Thus we have first

$$f_0(\eta_1)=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{3}}.$$

Next, writing ξ for ξ_i $(i=2,3,4)$, we have

$$\xi^3-1=3\sqrt[3]{4}\,\xi^2+6\sqrt[3]{2}\,\xi+3=3(25+20\alpha+16\alpha^2)$$

and

$$\frac{1}{\xi^3-1}=\frac{-5+4\alpha}{9},\quad \frac{1}{(\xi^3-1)^2}=\frac{25-40\alpha+16\alpha^2}{81}.$$

Hence

$$1-\frac{18}{\xi^3-1}-\frac{27}{(\xi^3-1)^2}=\frac{24}{9}(1+2\alpha-2\alpha^2),$$

whence

$$\xi\left(1-\frac{18}{\xi^3-1}-\frac{27}{(\xi^3-1)^2}\right)=\frac{24\sqrt[3]{4}}{9}(1-\alpha+\alpha^2).$$

Thus we have

$$f_0(\eta_i)=\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{18}(1-\alpha+\alpha^2)\qquad (i=2,3,4)$$

and

$$f_0(\eta_2)\,f_0(\eta_3)\,f_0(\eta_4)=\frac{1}{2\cdot 3^2\sqrt{3}}.$$

So we have

$$\prod_{i=1}^{4} f_0(\eta_i)=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2^2\cdot 3^3}$$

and finally

$$K=-\frac{1}{2^4 3^9}.$$

Since $\{(\varrho - \varrho^2)\sqrt[6]{4(\varrho - \varrho^2)^3}\}^{-1}$ is a 12-th root of K, we have

$$\prod_{i=1}^{12} f(z + \gamma_i) = 1 \tag{36}$$

for the function

$$f(z) = (\varrho - \varrho^2)\sqrt[6]{4(\varrho - \varrho^2)^3} f_0(z) = (\varrho - \varrho^2)\sqrt[6]{\omega}\frac{X}{Y},$$

where

$$\omega = 4(\varrho - \varrho^2)^3. \tag{37}$$

If we set

$$f(z) = \sqrt[6]{\omega} \cdot f_1(z), \tag{38}$$

then $f_1(z)$ is a function on C defined over F with the divisor $\mathfrak{d}$.

9. Let ν be an integer of F prime to 6. Then since $\nu\mathfrak{d} = \mathfrak{d}$, there is a constant ε_ν such that

$$\varepsilon_\nu f(\nu z) = \prod_{\alpha \bmod \nu} f\left(z + \frac{\alpha}{\nu}\right), \tag{39}$$

where α runs over all residue classes mod ν.

Setting $\varepsilon_\nu \nu = \nu_*$, we have

$$\nu_* = \prod_{\substack{\alpha \bmod \nu \\ \alpha \not\equiv 0(\nu)}} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) = \omega^{\frac{N\nu - 1}{6}} \prod_{\substack{\alpha \bmod \nu \\ \alpha \not\equiv 0(\nu)}} f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right), \tag{40}$$

the product being extended over all residue classes mod ν except 0.

Let S' be the field of the ν-division points of C and denote by P_ν the division point of C corresponding to $\frac{1}{\nu}$, i. e., $P_\nu = \left(\frac{1}{\nu}\right)$. For an automorphism σ of S'_ν/F, P_ν^σ is also a ν-division point of C which we can express as $P_\nu^\sigma = \left(\frac{\mu_\sigma}{\nu}\right)$, $(\mu_\sigma, \nu) = 1$. Therefore we have $P_\nu^\sigma = \mu_\sigma P_\nu$. Since every element α of $\mathfrak{o}_F$ is defined over F in the sense of algebraic geometry, we have $(\alpha P_\nu)^\sigma = \alpha P_\nu^\sigma = \alpha\mu_\sigma P_\nu = \mu_\sigma(\alpha P_\nu)$. This means

$$f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^\sigma = f_1\left(\frac{\mu_\sigma \alpha}{\nu}\right)$$

and consequently the right hand side of (40) belongs to F. Hence ε_ν is a number of F. On the other hand, replace z in (39) by $z + \gamma_i$ and take the product over $i = 1, 2, \ldots, 12$. Then, since the set of points $\{(\nu\gamma_1), (\nu\gamma_2), \ldots, (\nu\gamma_{12})\}$ coincides with $\{(\gamma_1), (\gamma_2), \ldots, (\gamma_{12})\}$, from the relation (36) and from

$$\prod_{i=1}^{12} \varepsilon_\nu f(\nu z + \gamma_i) = \prod_{i=1}^{12} \prod_{\alpha \bmod \nu} f\left(z + \frac{\alpha}{\nu} + \gamma_i\right)$$

follows $\varepsilon_\nu^{12} = 1$. So ε_ν is a root of unity in F. We see also that $(\nu) \to \nu_* = \varepsilon_\nu \nu$ gives a character of the group of ideals of F prime to 6, because the relation $\varepsilon_{\nu\nu'} = \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu'}$ is proved by the same method as in § 5.

Let M be the set of representatives mod. ν such that $\{0, \pm M, \pm\varrho M, \pm\varrho^2 M\}$ is a complete set of representatives mod ν. It follows from (30) and (40) that

$$\left(\prod_{\alpha \in M} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)\right)^6 = (-1)^{\frac{N\nu - 1}{6}} \prod_{\substack{\alpha \bmod \nu \\ \alpha \not\equiv 0(\nu)}} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) = (-1)^{\frac{N\nu - 1}{6}} \nu_*$$

and

$$\sqrt[6]{\nu_*} = \zeta_{12}^{\frac{N\nu-1}{6}} \prod_{\alpha \in M} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) = \left(\zeta_{12}\sqrt[6]{\omega}\right)^{\frac{N\nu-1}{6}} \prod_{\alpha \in M} f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right), \tag{41}$$

where $\zeta_{12} = e^{\frac{2\pi i}{12}}$ and $\sqrt[6]{\nu_*}$ is a 6-th root of ν_*.

Assume now that $N\nu \equiv 1 \pmod{36}$ and that both 1 and 2 are unramified in $F\left(\sqrt[6]{\nu}\right)/F$, which is surely the case whenever $\nu \equiv 1 \pmod{108}$. Then the right hand side of (41) is equal to

$$\left(\zeta_{12}\sqrt[6]{\omega}\right)^{\frac{N\nu-1}{6}} f_1\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{N\nu-1}{6}} \prod_{\alpha \in M} \frac{f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)}{f_1\left(\frac{1}{\nu}\right)}$$

and belongs to the ν-Strahl class field S_ν over F, because $\frac{f_1(\alpha z)}{f_1(z)}$ $(\alpha \in \mathfrak{o}_F)$ is, as well as $f_1(z)^6$, a rational function of X^3 defined over F (cf. § 5). Hence 1 and 2 are unramified in $F\left(\sqrt[6]{\varepsilon_\nu}\right)$, which implies $\varepsilon_\nu = 1$. This shows that ν_* is a Grössencharakter.

10. The curve C is reductible modulo every prime ideal of F except 1 and 2 (Deuring [3], [6], Hasse [12]). So we see as in § 2 that every integral ideal (μ) prime to 6 of F determines an Artin endomorphism $\mu^* \in \mathfrak{o}_F$ in such a way that the relation $\mu^* P_\nu = P_\nu^{\sigma_\mu}$ holds with the Artin automorphism σ_μ of (μ) with respect to S'_ν/F, whenever P_ν is a ν-division point of C and $(\mu, \nu) = 1$. We have then

$$g\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\sigma_\mu} = g\left(\frac{\mu^*\alpha}{\nu}\right) \tag{42}$$

for any function g on C defined over F and for every integer α of F. From (41) and (42) follows

$$\sqrt[6]{\nu_*}^{\sigma_\mu - 1} = \left(\zeta_{12}\sqrt[6]{\omega}\right)^{\frac{N\nu-1}{6}(\sigma_\mu - 1)} \frac{\prod_{\alpha \in M} f_1\left(\frac{\mu^*\alpha}{\nu}\right)}{\prod_{\alpha \in M} f_1\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)},$$

which implies, together with the lemma in § 3, that

$$\left(\frac{\nu_*}{\mu}\right)_6 = \left(\frac{-\omega}{\mu}\right)_6^{\frac{N\nu-1}{6}} \left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_6 \qquad ((\mu, 6) = (\nu, 6) = (\mu, \nu) = 1). \tag{43}$$

11. Exactly in the same manner as in § 6, we can deduce from (43) a reciprocity relation

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_6 \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_6^{-1} = 1 \tag{44}$$

for any integers μ, ν prime to 6 with $(\mu, \nu) = 1$, $\nu \equiv 1 \pmod{108}$. The formula (44) gives of course some information about the quadratic and cubic power residue symbols. In this §, however, we shall show that more general results about such symbols are easily obtained if we use other functions than f of (38). We treat briefly only the cubic case.

Consider the function

$$h(z) = \sqrt[3]{4}\, h_0(z), \quad h_0(z) = \frac{1}{X(z)}. \tag{45}$$

Then we have

$$(h) = 2(0) - \left(\frac{-1+\varrho}{3}\right) - \left(\frac{-1+\varrho^2}{3}\right), \quad h(-\varrho z) = \varrho^2 h(z)$$

and

$$(46) \qquad h(z)\, h\left(z + \frac{-1+\varrho}{3}\right) h\left(z + \frac{-1+\varrho^2}{3}\right) = \frac{4}{X\left(-\frac{\varrho}{3}\right)^3} = 1.$$

Next, for $\nu \in \mathfrak{o}_F$ prime to 3, there is a constant η_ν such that

$$(47) \qquad \eta_\nu h(\nu z) = \prod_{\alpha \bmod \nu} h\left(z + \frac{\alpha}{\nu}\right).$$

Since the divisor (h) is invariant by the endomorphism ν, it follows from (46) and (47) that $\eta_\nu^3 = 1$. Furthermore, (47) gives

$$(48) \qquad \eta_\nu \nu^2 = \prod_{\substack{\alpha \bmod \nu \\ \alpha \not\equiv 0 (\nu)}} h\left(\frac{\alpha}{\nu}\right),$$

where α runs over all residue classes mod. ν except 0.

Let now M' be a set of representatives mod. ν such that $\{0, M', \varrho M', \varrho^2 M'\}$ forms a complete set of representatives mod. ν. Then we have

$$(49) \qquad \sqrt[3]{\eta_\nu \nu^2} = \prod_{\alpha \in M'} h\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) = \sqrt[3]{4}^{\frac{N\nu-1}{3}} \prod_{\alpha \in M'} h_0\left(\frac{\alpha}{\nu}\right).$$

Therefore, notations σ_μ, μ^* being as before, the relation

$$(50) \qquad \left(\frac{\eta_\nu \nu^2}{\mu}\right)_3 = \left(\frac{4}{\mu}\right)_3^{\frac{N\nu-1}{3}} \left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_3^{-1}$$

is proved similarly to (18) or (43), where we must assume $(\mu, 6\nu) = 1$ so that μ^* can be defined.

Suppose now that two integers μ, ν of F are given such that $(\mu, \nu) = (\mu, 3) = (\nu, 3) = 1$, $\nu \equiv 1 \pmod{27}$. Then, there is an integer μ_0 of F such that $\mu_0 \equiv \mu \pmod{\nu}$, $(\mu_0, 6) = 1$. Furthermore, since $X\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^3$ belongs to the ν-Strahl class field S_ν over F, we deduce similarly to § 9 that $\eta_\nu = 1$ and that $\sqrt[3]{\nu}$ belongs to S_ν. Hence, as in § 6, (50) gives $\left(\frac{\nu}{\mu_0}\right)_3 \left(\frac{\mu_0}{\nu}\right)_3^{-1} = 1$. Evidently we have $\left(\frac{\mu_0}{\nu}\right)_3 = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_3$, and, since ideals (μ) and (μ_0) have the same Artin automorphism with respect to S_ν/F (Deuring [5]), we have also $\left(\frac{\nu}{\mu_0}\right)_3 = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_3$. Thus we obtain

$$(51) \qquad \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_3 \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_3^{-1} = 1$$

for any integers μ, ν with $(\mu, 3) = (\nu, 3) = (\mu, \nu) = 1$, $\nu \equiv 1 \pmod{27}$. This is a special case of a reciprocity law studied by Eisenstein.

12. We now observe another consequence of (43), assuming, as in § 7, every result of the class field theory.

We have

$$(52) \qquad \left(\frac{\nu_*}{\mu}\right)_6 \left(\frac{\mu^*}{\nu}\right)_6^{-1} = \left(\frac{-\omega}{\mu}\right)_6^{\frac{N\nu-1}{6}},$$

for any μ, ν with $(\mu, 6) = (\nu, 6) = (\mu, \nu) = 1$. For every integer ν prime to 6, denote by $\hat{\nu}$ the generator of the ideal (ν) such that $\hat{\nu} \equiv 1 \pmod{2\mathfrak{l}}$. This $\hat{\nu}$ is uniquely determined and $(\nu) \to \hat{\nu}$ defines a Grössencharakter. Set $\mu^* = \hat{\mu}\theta_\mu$, $\nu_* = \hat{\nu}\delta_\nu$. Then the theory of norm residue symbol shows

$$(53) \qquad \left(\frac{\hat{\nu}}{\mu}\right)_6 \left(\frac{\hat{\mu}}{\nu}\right)_6^{-1} = \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_6 \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{2}\right)_6 = \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_2 \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_3^{-1} \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{2}\right)_2 \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{2}\right)_3^{-1}$$
$$= \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_3^{-1} \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{2}\right)_2.$$

This means, together with (52), that

$$(54) \qquad \left(\frac{\delta_\nu}{\mu}\right)_6 \left(\frac{\theta_\mu}{\nu}\right)_6^{-1} = \left(\frac{-\omega}{\mu}\right)_6^{\frac{N\nu-1}{6}} \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_3 \left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{2}\right)_2,$$

which determines a complete relationship between two characters μ^* and ν_*.

Now, Davenport-Hasse [2] gives

$$(55) \qquad \theta_\mu = \left(\frac{-1}{\mu}\right)_2 = (-1)^{\frac{N\mu-1}{2}}.$$

Set $\mu = -3 - 2\varrho$ in (54). Then we have $\mu = \hat{\mu}$, $N\mu = 7$,

$$\left(\frac{-\varrho}{\mu}\right)_6 = -\varrho, \quad \left(\frac{-\omega}{\mu}\right)_6 = \varrho^2$$

and

$$\left(\frac{\hat{\mu}, \hat{\nu}}{2}\right)_2 = \left(\frac{-3-2\varrho, \hat{\nu}}{2}\right)_2 = \left(\frac{\varrho - \varrho^2, \hat{\nu}}{2}\right)_2 = \left(\frac{\varrho - \varrho^2}{\nu}\right)_2,$$

as $-3 - 2\varrho \equiv \varrho - \varrho^2 \pmod 4$.

Furthermore, $\tau_\nu = \left(\frac{2}{\nu}\right)_3$ gives a character of the ideal group of F whose conductor is equal to 6 and it is easily seen that $\hat{\nu}\tau_\nu \equiv 1 \pmod 3$.

On the other hand the norm residue symbol has the property that

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)_3 = 1,$$

whenever $\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod 3$, (Hasse [9]). Hence we have

$$\left(\frac{-3-2\varrho, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_3 = \left(\frac{\varrho, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_3 \left(\frac{1+3\varrho, \hat{\nu}}{\mathfrak{l}}\right)_3 = \left(\frac{\varrho}{\nu}\right)_3^{-1} \left(\frac{1+3\varrho, \tau_\nu^{-1}}{\mathfrak{l}}\right)_3$$
$$= \left(\frac{\varrho}{\nu}\right)_3^{-1} \left(\frac{\tau_\nu^{-1}}{1+3\varrho}\right)_3 = \left(\frac{2\varrho}{\nu}\right)_3^{-1}.$$

Thus we obtain

$$\delta_\nu = (-1)^{\frac{N\nu-1}{2}} \varrho^{\frac{N\nu-1}{3}} \left(\frac{2\varrho}{\nu}\right)_3^{-1} \left(\frac{\varrho - \varrho^2}{\nu}\right)_2 = (-1)^{\frac{N\nu-1}{2}} \left(\frac{4(\varrho-\varrho^2)^3}{\nu}\right)_6^{-1},$$

namely,

$$(56) \qquad \delta_\nu = \left(\frac{-\omega}{\nu}\right)_6^{-1} \qquad (\omega = 4(\varrho - \varrho^2)^3).$$

Therefore the character ν_* is given by

$$(57) \qquad \nu_* = \hat{\nu}\delta_\nu = \left(\frac{-\omega}{\nu}\right)_6^{-1} \hat{\nu} = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)_6^{-1} \nu^*.$$

If $\nu = \pi$ is a prime number prime to 6, then, as in § 7, the result of Davenport-Hasse [2] yields

$$\pi^* = -\left(\frac{-1}{\pi}\right)_2 \sum_{\substack{u \bmod \pi \\ u \not\equiv 0,1(\pi)}} \left(\frac{u}{\pi}\right)_3 \left(\frac{1-u}{\pi}\right)_2, \tag{58}$$

which, together with (40) and (57), implies the equality

$$\prod_{\substack{a \bmod \pi \\ a \not\equiv 0(\pi)}} f\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) = -\left(\frac{-\omega}{\pi}\right)_6^{-1} \sum_{\substack{u \bmod \pi \\ u \not\equiv 0,1(\pi)}} \left(\frac{u}{\pi}\right)_3 \left(\frac{1-u}{\pi}\right)_2 \tag{59}$$

between a cyclotomic sum and a product of division values of an elliptic function.

13. Some discussions should be added here. Formulas (14) and (40) are considered to generalize the relation

$$n = \prod_{\substack{a \bmod n \\ a \not\equiv 0(n)}} (\zeta_n^a - \zeta_n^{-a}) \qquad \left(\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$$

for an odd natural number n. Similarly formulas (16) and (41) are generalizations of the fact that

$$\prod_{a \in M} (\zeta_n^a - \zeta_n^{-a})$$

is a square root of $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n$, where M is a set of representatives mod. n such that $\{0, \pm M\}$ is a complete set of representatives mod. n. If we especially take $M = \{1, 3, 5, \ldots, n-2\}$, then the product becomes a canonical square root of $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n$. More precisely, we have

$$\prod_{a \in M} (\zeta_n^a - \zeta_n^{-a}) = \begin{cases} \sqrt{n} & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ i\sqrt{n} & (n \equiv -1 \pmod 4). \end{cases}$$

As is well known this relation is applied to determine the sign of Gauss sums.

In formulas (16) and (41), we may similarly normalize the set M. For example, in (16), the set M is uniquely fixed by the condition that, for every $\alpha \in M$, $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^2}$ $(\mathfrak{l}^2 = (2))$ holds and $\frac{\alpha}{\hat{\nu}}$ $((\nu) = (\hat{\nu}),\ \hat{\nu} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^3})$ lies in the square with vertices $0, 1, i, 1+i$. In this way, we get a canonical 4-th root $\prod_{a \in M} f\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)$ of $(-1)^{\frac{N\nu-1}{4}} \nu_*$. Let now π be a prime number of degree 1 of $F = Q(i)$ such that $\pi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$ and consider the Gauss sum

$$\tau(\pi) = \sum_{\substack{u \bmod \pi \\ u \not\equiv 0(\pi)}} \left(\frac{u}{\pi}\right)_4 \zeta_p^u \qquad (p = \pi\bar{\pi},\ u \text{ rational integer}).$$

Then, since $\tau(\pi)^4 = \pi^3\bar{\pi}$ (Hasse [11]), the 4-th root

$$(-1)^{\frac{N\pi^3\bar{\pi}-1}{4}} \prod_{a \in M} f\left(\frac{\alpha}{\pi^3\bar{\pi}}\right),$$

of $\pi^3\bar{\pi}$, under the above mentioned normalization of M, differs from $\tau(\pi)$ only by a factor $\varepsilon(\pi)$ which is a definite 4-th root of unity. A corresponding fact exists also for the formula (41).

Thus a problem of "sign determination" arises, i. e., the determination of the root of unity such as $\varepsilon(\pi)$. This problem, being of course of considerable difficulty, is regarded as a modification of Kummer's conjecture, which is precisely stated in Hasse [11] (see also Beyer [1]).

The method by which various reciprocities were deduced in the present paper is of course applicable also to the case of quadratic reciprocity. For instance, the reciprocity of the quadratic residues in the rational number field is easily derived from the formula

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \prod_{a \in M} (\zeta_n^a - \zeta_n^{-a})$$

and from the lemma in § 3.

References.

[1] *G. Beyer*, Über eine Klasseneinteilung aller kubischen Restcharaktere, Abh. Math. Sem. Hamburg **19** (1955), 115—116.

[2] *H. Davenport* and *H. Hasse*, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen, Journ. r. a. Math. **172** (1934), 151—182.

[3] *M. Deuring*, Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers, Math. Zeitschr. **47** (1942), 643—654.

[4] *M. Deuring*, Algebraische Begründung der komplexen Multiplikation, Abh. Math. Sem. Hamburg **16** (1947), 32—47.

[5] *M. Deuring*, Die Struktur der elliptischen Funktionenkörper und die Klassenkörper der imaginären quadratischen Zahlkörper, Math. Ann. **124** (1952), 393—426.

[6] *M. Deuring*, Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1953, 85—94, 1955, 13—43, 1956, 37—76, 55—80.

[7] *R. Fueter*, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen, Leipzig, I (1924), II (1927).

[8] *R. Fueter*, Reziprozitätsgesetze in quadratisch-imaginären Körpern, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1927, 1—11, 427—445.

[9] *H. Hasse*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. I (1926), Ia (1927), II (1930), Jahresbericht der DMV.

[10] *H. Hasse*, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934), 325—348.

[11] *H. Hasse*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin 1950.

[12] *H. Hasse*, Zetafunktion und *L*-Funktion zu einem arithmetischen Funktionenkörper vom Fermatschen Typus, Abh. Deutsch. Akad. der Wiss. zu Berlin, Klasse f. Math. u. allg. Naturw., Jahrg. 1954, Heft 4.

[13] *H. Reichardt*, Eine Bemerkung zur Theorie des Jacobischen Symbols, Math. Nachr. **19** (1958), 171—175.

[14] *G. Shimura*, On complex multiplications, Proc. Int. Symp. on Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 23—30.

[15] *Y. Taniyama*, Jacobian varieties and number fields, Proc. Int. Symp. on Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 31—45.

[16] *A. Weil*, Foundations of algebraic geometry, New York 1946.

[17] *A. Weil*, Variété abéliennes et courbes algébriques, Paris 1948.

[18] *A. Weil*, Jacobi sums as Grössencharaktere, Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 487—495.

[19] *A. Weil*, On the theory of complex multiplication, Proc. Int. Symp. on Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 10—22.

Eingegangen 16. Mai 1960.

Über Konvergenzfragen bei Polynominterpolation mit äquidistanten Knoten[1]). I.

Von *Paul Otto Runck* in Würzburg.

Einleitung.

Hat man eine Funktion $f(x)$ vorliegen, die in einem Intervall $\langle a, b\rangle$ gewisse Eigenschaften besitzt, z. B. daß sie stetig ist oder einer Lipschitzbedingung genügt[2]), und will man diese Funktion $f(x)$ durch ein Lagrangesches Interpolationspolynom $L_n(x) = L_n[f; x]$ annähern, das mit $f(x)$ in $n+1$ über $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig verteilten Punkten übereinstimmt, so ist man zunächst versucht zu glauben, daß die Abweichung in $\langle a, b\rangle$, d. h. $\max\limits_{x \in \langle a, b\rangle} | L_n(x) - f(x) |$ mit wachsendem n immer kleiner wird.

Dies ist aber leider nicht der Fall. Um die Jahrhundertwende hat Runge [9] die analytische Funktion $y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ angegeben, für die die Folge der Lagrangeschen Interpolationspolynome bei in $\langle -5, 5\rangle$ äquidistanten Interpolationsknoten (wie wir die gleichmäßig verteilten Punkte nennen wollen, in denen $y(x)$ und $L_n(x)$ übereinstimmen) nur in dem Intervall $\langle -\alpha, \alpha\rangle \subset \langle -5, 5\rangle$ ($\alpha = 3{,}63\ldots$) gleichmäßig gegen $y(x)$ konvergiert, während sie in den Intervallen $\langle -5, -\alpha\rangle$ und $\langle \alpha, 5\rangle$ divergiert. Später hat Bernstein [2] für die Funktion $y(x) = | x |$ gezeigt, daß die Folge der Lagrangeschen Polynome bei in $\langle -1, 1\rangle$ äquidistanten Interpolationsknoten in allen Punkten aus $\langle -1, 1\rangle$ außer den Punkten $\pm 1, 0$ divergiert (daß im Punkt 0 Konvergenz auftritt, wurde erst später bewiesen). Fréchet [3] hat auf eine weitere unangenehme Eigenschaft dieser Interpolationspolynome aufmerksam gemacht: Weist eine (z. B. ganze) Funktion in einem einzigen Punkt, der in der Mitte des Intervalles liege, in dem die Funktion approximiert werde, einen Fehler auf, und ist dieser Punkt ein Interpolationsknoten, so wirkt sich dieser Fehler so ungünstig aus, daß das Lagrangepolynom, zumindest für große n, vollkommen unbrauchbar wird.

So ist es nicht verwunderlich, daß man sich in der Approximationstheorie von den Lagrangeformeln mit äquidistanten Knoten (von wenigen Ausnahmen abgesehen, z. B. [4], [13]) distanzierte und für die Anwendung andere Formeln empfahl. Z. B. richtete man das Augenmerk auf Lagrangesche Interpolationsformeln mit einer anderen Ver-

---

[1]) D 77. — Vgl. die vorläufige Veröffentlichung in den Comptes Rendues [7] sowie die kurzen Ausführungen in den Abstracts of short communications, International Congress of Mathematicians in Edinburgh 1958 [8]. — An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. P. L. Butzer für wertvolle Anregungen besonders hinsichtlich der Fragestellung des 2. Teiles sowie Herrn Prof. Dr. H. Grunsky für die vielen Bemerkungen und Verbesserungsvorschläge bei der Abfassung der Arbeit herzlich danken.

[2]) D. h. $|f(x) - f(y)| \leqq M\,|x-y|^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1;\ M = \text{const.})$, was kurz mit $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ bezeichnet wird.

teilung der Interpolationsknoten (man wähle etwa als Knoten die Wurzeln der Tschebycheffpolynome oder die Wurzeln anderer orthogonaler Polynome), die diese unangenehmen Eigenschaften kaum aufweisen, oder man betrachtete andere von den Lagrangepolynomen verschiedene Interpolationspolynome.

Doch benutzt man in der angewandten Mathematik der einfachen rechnerischen Handhabung wegen, meist sogar mit befriedigendem Erfolg die Interpolationsformeln von Lagrange mit äquidistanten Knoten (die Polynome von Newton, Gauß, Stirling (n gerade), Bessel (n ungerade) unterscheiden sich von diesen Lagrangepolynomen nur in der Schreibweise). Ebenso sind die meisten Formeln zur numerischen Integration und Differentiation von diesen Lagrangeformeln abgeleitet. Selbst bei einer größeren Anzahl von äquidistanten Interpolationsknoten, wenn auch nur in einem Teilintervall von $\langle a, b\rangle$, kommt man mitunter zu recht guten Ergebnissen (siehe z. B. H. E. Salzer [10], [11]).

Das eine dürfte aus diesen kurzen Andeutungen hervorgehen, daß die Lagrangeformeln mit äquidistanten Knoten, zumindest bei einer großen Anzahl von Interpolationsknoten, ungeeignet sind, eine in $\langle a, b\rangle$ gegebene Funktion $f(x)$ im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ anzunähern. Vielleicht läßt sich aber ein von n abhängiges Teilintervall $\mathfrak{T}_n$ aus $\langle a, b\rangle$ finden, in dem die Abweichung $\max\limits_{x\in\mathfrak{T}_n} |L_n[f; x] - f(x)|$ unterhalb einer vorgegebenen Schranke ε bleibt, falls über $f(x)$ gewisse Voraussetzungen gemacht werden, z. B. daß $f(x)$ einer Lipschitzbedingung genügt. Es ist das Ziel des ersten Teiles dieser Arbeit, dieses Problem genau zu untersuchen.

Für das Teilintervall

$$\mathfrak{T}_n\colon \left\langle -\frac{r}{\sqrt{n}}, \frac{r}{\sqrt{n}}\right\rangle \subset \langle -1, 1\rangle;\ r \text{ unabh. von } n$$

(dessen Länge für $n \to \infty$ wie $\frac{2r}{\sqrt{n}}$ nach 0 strebt), werden wir die gleiche Approximationsgüte erhalten, wie sie für die Lagrangeformeln mit günstiger Knotenverteilung, z. B. für die Formeln mit Tschebycheff-Knoten (Knoten sind, wie schon erwähnt, die Wurzeln der Tschebycheffpolynome) bekannt sind (vgl. [6]; S. 390). Die Größe der Abweichung in dem angegebenen Teilintervall ist also von der Ordnung $O(n^{-\alpha} \log n)$ für Funktionen $f(x)$, die in $\langle -1, 1\rangle$ der Bedingung $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ genügen[3]). Daß sich dieses Intervall größenordnungsmäßig nicht mehr verbessern läßt, ohne daß unsere verhältnismäßig günstige Approximationseigenschaft verlorengeht, wird in einer weiteren Arbeit angegeben werden. Doch werden wir auch in dieser Arbeit an gegebener Stelle hierauf näher eingehen.

In einem zweiten Teil wollen wir untersuchen, ob durch gewisse Summationsverfahren die auf die Lagrangepolynome mit äquidistanten Knoten angewandt werden, sich im Intervall $\mathfrak{T}_n$ günstigere Abschätzungen erzielen lassen. Sodann wollen wir noch prüfen, ob wir bei diesen Lagrangepolynomen eine Gibbsche Erscheinung beobachten können.

1. Bezeichnungen und Sätze aus der Approximationstheorie.

Unseren Ausführungen wollen wir einige wichtige Bezeichnungen und Sätze (ohne Beweis) voranstellen, von denen wir später Gebrauch machen werden.

1. Unter $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ soll eine Funktion verstanden werden, die einer Lipschitzbedingung mit dem Exponenten α und der Konstanten M genügt, für die also $|f(x) - f(y)| \leqq M\,|x - y|^\alpha$ gilt $(0 < \alpha \leqq 1)$.

[3]) Für den Punkt 0 wurde dieses Ergebnis 1940 von P. Szasz [13] gezeigt.

In der Approximationstheorie benutzt man zur Charakterisierung von Funktionen $f(x)$ oft den sogenannten Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$, der wie folgt definiert ist:

Ist $f(x)$ eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ gegebene Funktion, δ eine beliebige positive Zahl, und wird allen Paaren $x, y \in \langle a, b\rangle$ mit $|x-y| < \delta$ der Wert $|f(x)-f(y)|$ zugeordnet, so nennt man die obere Grenze dieser Absolutwerte, d. i.

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y|<\delta} |f(x)-f(y)|, \quad x, y \in \langle a, b\rangle$$

den Stetigkeitsmodul von $f(x)$. Die Bedingungen $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ und $\omega(\delta) \leqq M\delta^\alpha$ sind gleichwertig.

Merken wir uns noch folgende Eigenschaft des Stetigkeitsmoduls: Ist n eine natürliche, λ eine positive Zahl, so gilt

$$\omega(n\delta) \leqq n\omega(\delta); \quad \omega(\lambda\delta) \leqq ([\lambda]+1)\,\omega(\delta)^{4)}.$$

Für $\omega(\delta) = o(\log \delta)$ $(\delta \to 0)$ sagt man, daß die Funktion der Dini-Lipschitzbedingung genügt.

2. $\mathfrak{H}_n$ sei die Menge aller Polynome $P_n(x)$ mit reellen Koeffizienten von höchstens n-tem Grade, $\Delta(P_n) = \max\limits_{a \leqq x \leqq b} |P_n(x) - f(x)|$ die Abweichung des Polynoms $P_n(x)$ von einer gegebenen Funktion $f(x)$ in dem Intervall $\langle a, b\rangle$. Lassen wir die Polynome $P_n(x)$ die Menge $\mathfrak{H}_n$ durchlaufen, so bilden die $\Delta(P_n)$ eine nach unten beschränkte Zahlenmenge mit der unteren Grenze

$$E_n = \inf_{P_n(x) \in \mathfrak{H}_n} (\Delta(P_n)).$$

Wir nennen ein Polynom $P_n(x) \in \mathfrak{H}_n$ *bestes approximierendes Polynom* von $f(x)$, wenn $\Delta(P_n) = E_n$ gilt. Die Größe E_n selbst wird oft als *beste Approximation* der Funktion $f(x)$ durch Polynome $P_n(x)$ aus $\mathfrak{H}_n$ bezeichnet.

3. Nun wollen wir noch Abschätzungen für E_n angeben.

Satz I (von Jackson). *Für die beste Approximation E_n der in $\langle a, b\rangle$ stetigen Funktion $f(x)$ durch ein Polynom höchstens n-ten Grades gilt:*

$$E_n \leqq 3\,\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right),$$

wobei $\omega(\delta)$ der Stetigkeitsmodul von $f(x)$ ist[5]).

Folgerung. *Ist $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$, so ist*

$$E_n \leqq \frac{CM}{n^\alpha} \text{ mit } C = 3\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha.$$

Satz II (von Jackson). *Existieren p stetige Ableitungen der Funktion $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$, und ist $\omega_p(\delta)$ der Stetigkeitsmodul der letzten Ableitung $f^{(p)}(x)$, so gilt für $n > p$ die Abschätzung*

$$E_n \leqq \frac{C_p}{n^p}\,\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right) \text{ mit } C_p = 3\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^p p^p}{p!}\,(b-a)^p.$$

---

[4]) Beweis siehe z. B. [6]; S. 70.

[5]) Die Sätze von Jackson mit den besten Konstanten für die Approximation von 2π-periodischen Funktionen durch trigonometrische Polynome finden wir z. B. in dem Buche von Achieser [1]; S. 200. Die hier angegebenen Sätze mit möglichst guten Konstanten für die Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome bekommen wir nun leicht aus den Sätzen für trigonometrische Polynome mit Hilfe eines bekannten Verfahrens, wie es z. B. im Buche von Natanson [6], S. 108—115 zu finden ist.

Folgerung. *Tritt mit der Bedingung des Satzes der Fall* $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ *ein, so gilt für* $n > p$ *die Abschätzung*

$$E_n \leqq C'_p \frac{1}{n^{p+\alpha}} M \quad \text{mit } C'_p = 3 \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^p p^p}{p!} \left(\frac{p+1}{2}\right)^\alpha (b-a)^{p+\alpha}.$$

2. Sätze über das Konvergenzverhalten der Lagrangepolynome und über die Abschätzungen der Lebesguefunktion.

Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir uns in dieser Arbeit auf das spezielle Intervall $\langle -1, 1\rangle$ beschränken, in das sich leicht das allgemeine Intervall $\langle a, b\rangle$ durch eine lineare Transformation überführen läßt. Gegebenenfalls werden wir die Abweichungen der Ergebnisse beider Fälle kurz anführen.

Wir betrachten also das n-te Lagrangesche Interpolationspolynom, das in den $n+1$ äquidistanten Interpolationsknoten

$$(1) \qquad x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} i, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots$$

mit der gegebenen reellwertigen Funktion $f(x)$ übereinstimmt, und wie folgt definiert ist:

$$(2) \qquad L_n[f; x] = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x)$$

mit den *Lagrangeschen Grundfunktionen*

$$(3) \qquad l_k^{(n)}(x) = \prod_{i=0}^{n}{}' \left(\frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}}\right) \qquad \left(l_k^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}\right),$$

wobei der Strich an dem Produktzeichen andeutet, daß der Faktor mit $i = k$ auszulassen ist. Nun lautet

Satz 1. *$f(x)$ sei eine in $\langle -1, 1\rangle$ stetige Funktion mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$ und $L_n(x)$ das Lagrangesche Interpolationspolynom (2) mit den äquidistanten Interpolationsknoten (1). Dann gilt für alle x aus dem von n abhängenden Teilintervall*

$$(4) \qquad \mathfrak{T}_n : \langle -t_n, t_n\rangle < \langle -1, 1\rangle \text{ mit } t_n = \frac{r}{\sqrt{n}} \; (r \text{ beliebig wählbare Konstante})$$

mit von n unabhängigen[6]) *$A(r)$ und $B(r)$*

$$(5) \qquad |L_n(x) - f(x)| \leqq 3\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \cdot (A(r) \log n + B(r)).$$

a) *Für $n \geqq 8$ läßt sich der Faktor $A(r) \log n + B(r)$ durch den günstigeren Wert*[7])

$$\frac{1}{\pi} \log n + 2 \frac{e^{\frac{1}{2} r^2}}{\pi} \log_3 n + C(r) \qquad (C(r) \text{ unabh. von } n)$$

ersetzen, wobei diesmal der Koeffizient von $\log n$ *auch von r unabhängig ist.*

b) *Besitzt $f(x)$ eine p-te Ableitung mit dem Stetigkeitsmodul $\omega_p(\delta)$, so geht der erste Faktor $3\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ auf der rechten Seite von (5) in $\frac{C_p}{n^p}\,\omega_p\left(\frac{1}{n-p}\right)$ über mit $C_p = 3\frac{3^p p^p}{p!}$. Gilt $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_M\, \alpha$, so bekommen wir als Faktor $C'_p \left(\frac{1}{n}\right)^{p+\alpha} M$ mit $C'_p = 3 \cdot \frac{3^p p^p}{p!} (p+1)^\alpha$.*

---

[6]) Hat man r gewählt, dann muß n so groß bestimmt werden, daß $\frac{r}{\sqrt{n}} < 1$ ausfällt.

[7]) Es ist $\log_3 n = \log\log\log n$, was für $n \geqq 8$ größer als Null ist.

c) *Genügt $f(x)$ der Dini-Lipschitzbedingung, so läßt sich nach Vorgabe einer beliebigen Größe $\varepsilon > 0$ ein n_0 derart angeben, daß für alle $n \geqq n_0$ und $x \in \mathfrak{T}_n$*

$$|L_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon \tag{6}$$

gilt[8]).

Wir beweisen diesen Satz mit Hilfe von Satz 2, der eine Abschätzung für die sogenannte *Lebesguefunktion*

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k^{(n)}(x)| \tag{7}$$

gibt.

Satz 2. *Sei $\Lambda_n(x)$ die den Lagrangeschen Grundpolynomen* (3) *mit äquidistanten Knoten* (1) *zugeordnete Lebesguefunktion. Dann gilt für alle x aus dem von n abhängigen Teilintervall*

$$\mathfrak{T}_n\colon \langle -t_n, t_n\rangle < \langle -1, 1\rangle \text{ mit } t_n = \frac{r}{\sqrt{n}} \quad (r \text{ beliebig wählbare Konstante})$$

die Abschätzung

$$\Lambda_n(x) \begin{cases} \leqq A^*(r) \log n + B^*(r) & (8) \\ \leqq \dfrac{1}{\pi}\left(\log n + 2e^{\frac{r^2}{2}} \log_3 n\right) + C^*(r) & (9) \end{cases}$$

wobei $A^*(r)$, $B^*(r)$, $C^*(r)$ unabhängig von n sind und der Koeffizient von $\log n$ *in* (9) *nicht verbessert werden kann.*

Beweis von Satz 1. Es sei $P_n(x)$ das beste approximierende Polynom höchstens n-ten Grades mit der besten Approximation E_n. Dann ist

$$|L_n[f; x] - f(x)| \leqq |L_n[f; x] - L_n[P_n; x]| + |L_n[P_n; x] - f(x)|. \tag{10}$$

Da das Lagrangesche Polynom mit $n + 1$ Interpolationsknoten jedes Polynom höchstens n-ten Grades exakt darstellt, gilt

$$|L_n[P_n; x] - f(x)| = |P_n(x) - f(x)| \leqq E_n. \tag{11}$$

Andererseits folgt für den linearen Operator $L_n[f; x]$

$$L_n[f; x] - L_n[P_n; x] = L_n[f - P_n; x]. \tag{12}$$

Für ein in $\langle -1, 1\rangle$ beschränktes $g(x)$ bekommen wir

$$\begin{aligned} |L_n[g; x]| &= \left|\sum_{k=0}^{n} l_k^{(n)}(x)\, g(x_k^{(n)})\right| \\ &\leqq \left(\sum_{k=0}^{n} |l_k^{(n)}(x)|\right) \max_{-1 \leqq x \leqq 1} (|g(x)|) = \Lambda_n(x) \cdot \max_{-1 \leqq x \leqq 1} (|g(x)|), \end{aligned} \tag{13}$$

und somit gilt für $x \in \mathfrak{T}_n$

$$|L_n[f; x] - L_n[P_n; x]| \leqq \Lambda_n(x) \cdot E_n. \tag{14}$$

---

[8]) Für ein Intervall $\langle a, b\rangle$ bekommt man statt $\mathfrak{T}_n$ das Intervall $\left\langle \frac{1}{2}(a+b) - t_n, \frac{1}{2}(a+b) + t_n \right\rangle$, $t_n = \frac{r}{\sqrt{n}}$ und statt $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ bzw. $\omega_p\left(\frac{1}{n-p}\right)$ die Moduln $\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right)$ bzw. $\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right)$, und es gilt dann

$$C_p = 3 \cdot \frac{3^p p^p}{p!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^p, \qquad C_p' = 3 \cdot \frac{3^p p^p}{p!}(p+1)^\alpha \left(\frac{b-a}{2}\right)^{p+\alpha}.$$

Aus (10) wird mit (11) und (14)

$$(15)\qquad |L_n[f;x]-f(x)| \leqq E_n\Big[1+\max_{x\in\mathfrak{X}_n}(\Lambda_n(x))\Big].$$

Zuletzt wenden wir auf E_n Satz I, Satz II und die Folgerung zu Satz II (vgl. Nr. 1) und auf $1+\max\limits_{x\in\mathfrak{X}_n}(\Lambda_n(x))$ Satz 2 an und erhalten die Behauptungen mit $A(r)=A^*(r)$, $B(r)=B^*(r)+1$, $C(r)=C^*(r)+1$.

3. Umformung des Lagrangeschen Grundpolynoms. Hilfssätze.

Bevor wir an den Beweis des Satzes 2 gehen, bringen wir eine Umformung der Lagrangeschen Grundpolynome und Abschätzungen für die in der neuen Form der Grundpolynome auftretenden Funktionen.

Mittels $y=\frac{n}{2}x$ transformieren wir das Intervall $\langle -1, 1\rangle$ in das Intervall $\left\langle -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right\rangle$ und das Grundpolynom $l_k^{(n)}(x)$ in ein Polynom mit den Nullstellen $-\frac{n}{2}+i$; $i=0,1,2,\ldots,n$; $i\neq k$ und der Einsstelle $-\frac{n}{2}+k$. Ersetzen wir noch $-\frac{n}{2}+i$ bzw. $-\frac{n}{2}+k$ durch ι bzw. j, wobei ι sowie j entweder nur ganzzahlige oder nur halbzahlige Werte annehmen, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und bezeichnen wir das Polynom in der neuen Form mit $\bar{l}_j^{(n)}(y)$, dann gilt

$$(16)\qquad l_k^{(n)}(x)=\bar{l}_j^{(n)}(y)=\prod_{\iota=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}{}'\frac{(y-\iota)}{(j-\iota)},\quad -\frac{n}{2}\leqq j\leqq\frac{n}{2};\ j=-\frac{n}{2}+k$$

$$(17)\qquad =\frac{\dfrac{1}{y-j}\prod\limits_{\iota=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(y-\iota)}{\left(\frac{n}{2}+j\right)!\left(\frac{n}{2}-j\right)!\,(-1)^{\frac{n}{2}-j}}.$$

Das $\prod\limits_{\iota=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(y-\iota)$ besitzt nun alle ganz- bzw. halbzahligen Nullstellen zwischen $-\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$, was wir mittels der Gamma- und Sinus-Funktion wie folgt darstellen[9]):

$$(18)\qquad \prod_{\iota=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(y-\iota)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}+y\right)}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}+y\right)}=\Gamma\left(1+\frac{n}{2}+y\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}-y\right)\frac{\sin\pi\left(y-\frac{n}{2}\right)}{\pi}.$$

Benutzen wir auch im Nenner von (17) die Gammafunktion, so erhalten wir für die Lagrangeschen Grundpolynome (16/17)

---

[9]) Für die Darstellung des Faktors $\prod\limits_{\iota=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(y-\iota)$ in (17) durch Gamma- und Sinus-Funktion vgl. Steffensen [12]; S. 36.

$$\text{(A)}\quad l_k^{(n)}(x) = \bar{l}_j^{(n)}(y) = (-1)^{\frac{n}{2}-j}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}+y\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}-y\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}+j\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}-j\right)}\cdot\frac{\sin\pi\left(y-\frac{n}{2}\right)}{\pi(y-j)}$$

$$\left(-\frac{n}{2}\leqq j\leqq\frac{n}{2};\quad j=-\frac{n}{2}+k;\ y=\frac{n}{2}x\right).$$

Die in (A) auftretenden Ausdrücke der Gammafunktion sind von der Form $\Gamma(1+t+s)$, wobei $t>0$ und s reelle Variable bedeuten. Zunächst wollen wir noch $|s|\leqq qt$ mit $0<q<1$ (q unabh. von t) voraussetzen.

Nach der Formel von Stirling läßt sich die Gammafunktion für reelle $u\geqq 1$ wie folgt abschätzen:

$$\text{(19)}\qquad \log\Gamma(u) = \left(u-\frac{1}{2}\right)\log u - u + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(u^{-1}).$$

Für $u=1+t+s$ erhalten wir

$$\text{(20)}\qquad \log\Gamma(1+t+s)$$
$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(t+s+\frac{1}{2}\right)\log(1+t+s) - (1+t+s) + O\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$\text{(21)}\qquad = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(t+s+\frac{1}{2}\right)\log\left\{(t+s)\left(1+\frac{1}{t+s}\right)\right\} - (1+t+s) + O\left(\frac{1}{t}\right);$$

vermöge

$$\text{(22)}\qquad \left(t+s+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{t+s}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

folgt aus (20/21)

$$\text{(23)}\quad \log\Gamma(1+t+s) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(t+s+\frac{1}{2}\right)\log(t+s) - (t+s) + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Das Glied $\left(t+s+\frac{1}{2}\right)\log(t+s)$ formen wir weiter um zu

$$\text{(24)}\quad \left(t+s+\frac{1}{2}\right)\log t + t\left(1+\frac{s}{t}\right)\log\left(1+\frac{s}{t}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{s}{t}\right).$$

Nun ist

$$\text{(25)}\quad t\left(1+\frac{s}{t}\right)\log\left(1+\frac{s}{t}\right)$$
$$= t\left(1+\frac{s}{t}\right)\left(\frac{s}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{s}{t}\right)^3+\cdots\right)\qquad\left(\left|\frac{s}{t}\right|<1\right)$$
$$= t\left(\frac{s}{t}+\left(\frac{s}{t}\right)^2\frac{1}{2}-\left(\frac{s}{t}\right)^3\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\cdots\right)$$
$$= s + \frac{s^2}{t}\,\psi\left(\frac{s}{t}\right),$$

wobei

$$\text{(26)}\qquad \psi(u) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)\,k}\,u^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)\,(k+2)}\,u^k$$

ist. Mit (25), in (24) eingesetzt, ergibt sich für (23)

$$\text{(27)}\qquad \log\Gamma(1+t+s)$$
$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(t+s+\frac{1}{2}\right)\log t - t + \frac{s^2}{t}\,\psi\left(\frac{s}{t}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{s}{t}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

wobei $\psi(u)$ durch (26) definiert ist.

Gilt $s = o(t)$, so ist $\frac{s^2}{t}\,\psi\left(\frac{s}{t}\right) = \frac{s^2}{t}\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{s}{t}\right)\right) = \frac{s^2}{2t} + O\left(\frac{s^3}{t^2}\right)$, und wegen $\log\left(1 + \frac{s}{t}\right) = O\left(\frac{s}{t}\right)$ erhält man für (27)

$$(28)\quad \log \Gamma(1 + t + s) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(t + s + \frac{1}{2}\right)\log t - t + \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{t} + O\left(\max\left(\frac{1}{t}, \frac{|s|}{t}, \frac{|s|^3}{t^2}\right)\right).$$

Fassen wir die Ergebnisse von (27) und (28) zusammen:

Hilfssatz 1. *Es seien $t > 0$ und s reelle Variable und $|s| \leqq qt$; $0 < q < 1$ (q unabhängig von t). Dann gelten für $t \to \infty$ folgende Abschätzungen:*

$$\textbf{(B 1)}\quad \Gamma(1 + t + s) = \sqrt{2\pi}\, t^{t+s+\frac{1}{2}} \exp\left\{-t + \frac{s^2}{t}\,\psi\left(\frac{s}{t}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{s}{t}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}$$

und für $s = o(t)$

$$\textbf{(B 2)}\quad \Gamma(1 + t + s) = \sqrt{2\pi}\, t^{t+s+\frac{1}{2}} \exp\left\{-t + \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{t} + O\left(\max\left(\frac{1}{t}, \frac{|s|}{t}, \frac{|s|^3}{t^2}\right)\right)\right\}.$$

Nun ist es für den weiteren Verlauf der Ausführungen zweckmäßig, eine Abschätzung für

$$(29)\qquad G(t, s_1, s_2) = \frac{\Gamma(1 + t + s_1)\,\Gamma(1 + t - s_1)}{\Gamma(1 + t + s_2)\,\Gamma(1 + t - s_2)}$$

anzugeben und Beziehungen zwischen $G(t, s_1, s_2)$ und $G(t, s_1^*, s_2^*)$ bei voneinander verschiedenen Werten s_i, s_i^* $(i = 1, 2)$ herzuleiten.

Hilfssatz 2. *Es seien $t > 0$, s_i, s_i^* $(i = 1, 2)$ mit $0 \leqq |s_i| \leqq t$, $0 \leqq |s_i^*| \leqq t$ reelle Variable. Dann genügt die Funktion (29) der Bedingung*

$$\textbf{(C 1)}\qquad G(t, s_1^*, s_2^*) \leqq G(t, s_1, s_2) \text{ für } |s_1^*| \leqq |s_1|, |s_2^*| \geqq |s_2|.$$

Weiter gelten für $t \to \infty$ folgende Abschätzungen:

$$\textbf{(C 2)}\quad G(t, s_1, s_2) = \exp\left\{\frac{s_1^2}{t}\left(1 + \chi\left(\left(\frac{s_1}{t}\right)^2\right)\right) - \frac{s_2^2}{t}\left(1 + \chi\left(\left(\frac{s_2}{t}\right)^2\right)\right) + O\left(\max\left(\left(\frac{s_i}{t}\right)^2, \frac{1}{t}\right)\right)\right\}$$

mit $\chi(u) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{(\varkappa + 1)(2\varkappa + 1)}\, u^{\varkappa}$, *für* $|s_i| \leqq qt$, $0 < q < 1$; $i = 1, 2$ *(q unabh. von t).*

$$\textbf{(C 3)}\qquad G(t, s_1, s_2) = \exp\left\{\frac{s_1^2 - s_2^2}{t} + O\left(\max\left(\frac{1}{t}, \frac{s_i^4}{t^3}\right)\right)\right\}$$

für $s_i = o(t)$, $i = 1, 2$.

$$\textbf{(C 4)}\qquad G(t, s_1, s_2) = 1 + O\left(\max\frac{|(s_1 - s_2)(s_1 + s_2)|}{t}, \frac{1}{t}\right)$$

für $s_i = O(\sqrt{t})$, $i = 1, 2$; $|s_1| - |s_2| = o(\sqrt{t})$.

$$\textbf{(C 5)}\qquad G(t, s_1, s_2) = O\left(\exp\left\{\frac{s_1^2 - s_2^2}{t}\right\}\right)$$

für $|s_1| \leqq |s_2| \leqq qt$, $0 < q < 1$ (q unabhängig von t) bzw. $|s_2| \leqq |s_1| \leqq t^{\frac{3}{4}}$.

Beweis. Aus der logarithmischen Konvexität der Gammafunktion folgt[10])

$$(30)\quad \Gamma(1+t+s_i^*)\,\Gamma(1+t-s_i^*) \gtreqless \Gamma(1+t+s_i)\,\Gamma(1+t-s_i) \text{ für } |s_i^*| \gtreqless |s_i|\ (i=1,2),$$

und somit gilt für $|s_1^*| \leqq |s_1|$ und $|s_2^*| \geqq |s_2|$

$$G(t, s_1^*, s_2^*) = \frac{\Gamma(1+t+s_1^*)\,\Gamma(1+t-s_1^*)}{\Gamma(1+t+s_2^*)\,\Gamma(1+t-s_2^*)} \leqq \frac{\Gamma(1+t+s_1)\,\Gamma(1+t-s_1)}{\Gamma(1+t+s_2)\,\Gamma(1+t-s_2)} = G(t, s_1, s_2).$$

Dies liefert (C 1). Um (C 2) zu beweisen, benutzen wir (B 1) von Hilfssatz 1 mit $s = s_1, -s_1, s_2, -s_2$ ($|s_i| \leqq qt$, $0 < q < 1$) und erhalten

$$(31)\quad G(t, s_1, s_2) = \exp\left\{\frac{s_1^2}{t}\left(\psi\left(\frac{s_1}{t}\right) + \psi\left(\frac{-s_1}{t}\right)\right) - \frac{s_2^2}{t}\left(\psi\left(\frac{s_2}{t}\right) + \psi\left(\frac{-s_2}{t}\right)\right) + \frac{1}{2}\log\frac{\left(1+\frac{s_1}{t}\right)\left(1-\frac{s_1}{t}\right)}{\left(1+\frac{s_2}{t}\right)\left(1-\frac{s_2}{t}\right)} + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}.$$

Nun ist ($i = 1, 2$)

$$(32)\quad \psi\left(\frac{s_i}{t}\right) + \psi\left(\frac{-s_i}{t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{s_i^k + (-s_i)^k}{t^k} = 1 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{2}{(2\varkappa+1)(2\varkappa+2)}\left(\left(\frac{s_i}{t}\right)^2\right)^{\varkappa} = 1 + \chi\left(\left(\frac{s_i}{t}\right)^2\right)$$

und

$$(33)\quad \log\frac{\left(1+\frac{s_1}{t}\right)\left(1-\frac{s_1}{t}\right)}{\left(1+\frac{s_2}{t}\right)\left(1-\frac{s_2}{t}\right)} = O\left(\max\left(\frac{s_i}{t}\right)^2\right).$$

(31) zusammen mit (32) und (33) ergibt (C 2).

Für $s_i = o(t)$ ($i = 1, 2$) bekommen wir aus (C 2) wegen $\chi(u) = O(u)$ ($u = o(1)$), $\frac{s_i^2}{t}\,\chi\left(\left(\frac{s_i}{t}\right)^2\right) = O\left(\frac{s_i^4}{t^3}\right)$ und $\max\left(\frac{s_i^4}{t^3}, \left(\frac{s_i}{t}\right)^2, \frac{1}{t}\right) = \max\left(\frac{s_i^4}{t^3}, \frac{1}{t}\right)$[11]) die Formel (C 3).

Ist weiter $s_i = O(\sqrt{t})$ ($i = 1, 2$) und $|s_1| - |s_2| = o(\sqrt{t})$, so gilt

$$\frac{s_1^2 - s_2^2}{t} = \frac{(s_1 - s_2)(s_1 + s_2)}{t} = o(1) \text{ und } O\left(\max\left(\frac{s_i^4}{t^3}, \frac{1}{t}\right)\right) = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

womit wir aus (C 3) Formel (C 4) bekommen.

Für die in (C 2) definierte Funktion $\chi(u)$ gilt $u\,\chi(u) \leqq u^*\,\chi(u^*)$, $u \leqq u^*$, woraus mit $u = \left(\frac{s_1}{t}\right)^2$, $u^* = \left(\frac{s_2}{t}\right)^2$ ($|s_1| \leqq |s_2| \leqq qt$) zunächst $t\left(\left(\frac{s_1}{t}\right)^2 \chi\left(\frac{s_1}{t}\right)^2\right) - \left(\frac{s_2}{t}\right)^2 \chi\left(\left(\frac{s_2}{t}\right)^2\right) \leqq 0$ und dann mit $\exp\left\{O\left(\max\left(\left(\frac{s_i}{t}\right)^2, \frac{1}{t}\right)\right)\right\} = O(1)$ Formel (C 5) für $|s_1| \leqq |s_2| \leqq qt$ folgt. Für $t^{\frac{3}{4}} \geqq |s_1| \geqq |s_2|$ bekommen wir (C 5) direkt aus (C 3).

---

[10]) Siehe z. B. [5]. Es ist $\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)\right) = \frac{d}{dz}(\Psi(z)) = \Psi^{(1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^2} > 0$ für $z > 0$. Somit gilt $\log\Gamma(1+t+s^*) + \log\Gamma(1+t-s^*) > \log\Gamma(1+t+s) + \log\Gamma(1+t-s)$ für $s^* > s$, woraus (30) folgt.

[11]) Für $|s_i| \geqq t^{\frac{1}{2}}$ gilt $\left(\frac{s_i}{t}\right)^2 \leqq \left(\frac{s_i}{t}\right)^2 \cdot \frac{s_i^2}{t} = \frac{s_i^4}{t^3}$, für $|s_i| \leqq t^{\frac{1}{2}}$ aber $\left(\frac{s_i}{t}\right)^2 \leqq \left(\frac{s_i}{t}\right)^2 \cdot \frac{t}{s_i^2} = \frac{1}{t}$.

4. Beweis des Satzes über die Lebesguefunktion.

a) Einfache Abschätzung. Nun wollen wir die einfachere Abschätzung (8) des Satzes 2 beweisen. Nach (7), (A) und (29) folgt

$$\text{(D)} \qquad \Lambda_n(x) = \bar{\Lambda}_n(y) = \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) \left| \frac{\sin \pi\left(y - \frac{n}{2}\right)}{\pi(y-j)} \right|$$

$$= \frac{\left|\sin \pi\left(y - \frac{n}{2}\right)\right|}{\pi} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{G\left(\frac{n}{2}, y, j\right)}{|y-j|},$$

wobei j für ganz- bzw. halbzahlige $\frac{n}{2}$ ganz- bzw. halbzahlige Werte durchläuft.

Gemäß der Voraussetzung $x \in \mathfrak{T}_n$ beschränken wir uns auf $0 \leqq |y| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}$. Nach Formel (C 1) und (C 3) (Hilfssatz 2) folgt mit

$$t = \frac{n}{2}, \quad |s_1^*| = |y| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n} = s_1, \quad |s_2^*| = |j| \geqq 0 = s_2$$

$$(34) \qquad G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) \leqq G\left(\frac{n}{2}, \frac{r}{2}\sqrt{n}, 0\right) \leqq e^{\frac{r^2}{2}}\left(1 + \frac{c_1}{n}\right) \quad (c_1 \text{ unabh. von } n).$$

Nun setzen wir $y = Y + \theta$ $(0 \leqq \theta < 1)$, wobei Y der nächst kleinere Interpolationsknoten aus $\left\langle -\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right\rangle$ zu y sei. Dann gilt

$$(35) \qquad \frac{\left|\sin \pi\left(y - \frac{n}{2}\right)\right|}{\pi} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{|y-j|} = \frac{\sin \pi\theta}{\pi} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{|Y+\theta-j|}$$

$$= \frac{\sin \pi\theta}{\pi} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{Y-1} \frac{1}{Y-j+\theta} + \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta} + \frac{\sin \pi\theta}{\pi(1-\theta)}$$

$$+ \frac{\sin \pi\theta}{\pi} \sum_{j=Y+2}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{j-(Y+1)+1-\theta}$$

$$\leqq \frac{1}{\pi} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{Y-1} \frac{1}{Y-j} + 1 + 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{j=Y+2}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{j-(Y+1)} \text{ [12]}$$

$$\leqq \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{n}{2} + Y\right) + \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{n}{2} - Y - 1\right) + \frac{2\gamma}{\pi} + 2 + \frac{2c_2}{n}$$

$(c_2$ unabh. von $n)$

$$\leqq \frac{2}{\pi}(\log n - \log 2) + \frac{1}{\pi} \log\left(1 + \frac{Y}{\frac{n}{2}}\right)\left(1 - \frac{Y}{\frac{n}{2}}\right) + \frac{2\gamma}{\pi} + 2 + \frac{2c_2}{n}$$

$$(36) \qquad \leqq \frac{2}{\pi} \log n + \left(2 + \frac{2}{\pi}(\gamma - \log 2)\right) + \frac{c_3}{n} \qquad (c_3 \text{ unabh. von } n).$$

---

[12]) Es ist $\sum_{k=1}^{N} k^{-1} = \log N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right)$ (γ Eulersche Konstante);

$$k = Y - j \text{ bzw. } j - (Y+1) \text{ mit } 1 \leqq k \leqq \begin{cases} \frac{n}{2} + Y \\ \frac{n}{2} - Y - 1 \end{cases} \text{ sind ganze Zahlen.}$$

Aus (34) und (35/36) bekommen wir für (D), falls $x \in \mathfrak{T}_n$ gilt:

$$\Lambda_n(x) \leqq \frac{2}{\pi} e^{\frac{r^2}{2}} \log n + \left(2 + \frac{2}{\pi}(\gamma - \log 2)\right) e^{\frac{r^2}{2}} + c_4 \frac{\log n}{n} \quad (c_4 = c_4(r) \text{ unabh. von } n)^{13}),$$

woraus (8) mit $A^*(r) = \frac{2}{\pi} e^{\frac{r^2}{2}}$, $B^*(r) = 2\left(1 + \frac{1}{\pi}(\gamma - \log 2)\right) e^{\frac{r^2}{2}} + c_4(r) \frac{\log 2}{2}$ folgt.

b) Abschätzung mit möglichst guten Konstanten. Für den Beweis der zweiten Abschätzung (9) für $\Lambda_n(x)$, in der der Koeffizient von $\log n$ von r unabhängig ist, zerlegen wir die Summe in (D) in Teilsummen. Es sei y mit $|y| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}$ fest gewählt; nun zerlegen wir die Menge der j in Teilmengen derart, daß die Beziehungen von Hilfssatz 2 möglichst gut ausgenutzt werden.

Die Größenordnung der Summanden von (D) wird durch die beiden Faktoren

$$G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) \tag{37}$$

und

$$\frac{1}{|y - j|} \tag{38}$$

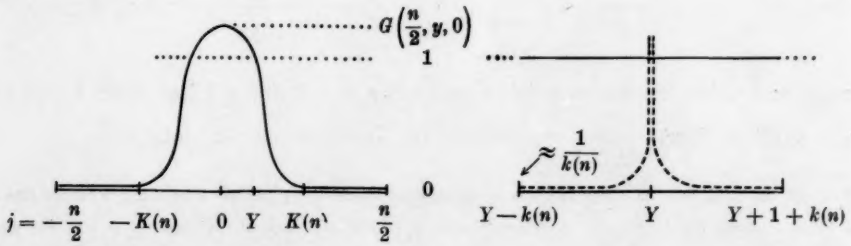
bestimmt. Nach (C 4) von Hilfssatz 2 gilt für den ersten Faktor (37) bei $|y| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}$ und $|y - j| = o(\sqrt{n})$

$$G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) = 1 + o(1). \tag{39}$$

Für $|j| \geqq K(n) = \sqrt{n}\, g(n)$ mit $g(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ und $g(n) = o(\sqrt{n})$ $\left(|y| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}\right)$ gilt nach (C 1) und (C 5):

$$G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) \leqq G\left(\frac{n}{2}, \frac{r}{2}\sqrt{n}, \sqrt{n}\, g(n)\right) = O(\exp\{-2g(n)^2\}) = o(1). \tag{40}$$

Eine Skizze möge das ein wenig veranschaulichen. In der linken Figur wird der Verlauf der Kurve $G\left(\frac{n}{2}, y, j\right)$ bei festem y und veränderlichem j angegeben. Hierbei sind die Größen $\pm K(n)$, die die äußeren j-Intervalle abgrenzen sollen, eingezeichnet. Das Intervall, in dem (39) gelten soll, ist der Übersichtlichkeit wegen hier nicht eingezeichnet, dagegen in der rechten Figur, in der wir eine Umgebung des Punktes Y bei sehr vergrößertem Abszissenmaßstab gezeichnet haben. Aus Zweckmäßigkeitsgründen wählen wir als Grenzen für dieses mittlere j-Intervall $Y - k(n)$ und $Y + 1 + k(n)$ mit $k(n) = \left[\frac{\sqrt{n}}{g(n)}\right] = o(\sqrt{n})$. Die Funktion $G\left(\frac{n}{2}, y, j\right)$ wird durch die ausgezogene Linie dargestellt.



[13]) Diese Ungleichung ist noch im Falle $n = 1$ erfüllt.

Der zweite Faktor (38) der Summanden von (D) nimmt in dem Intervall $\langle Y - k(n), Y + 1 + k(n)\rangle$ seine größten Werte an, während er in den übrigen Intervallen kleiner als $\frac{1}{k(n)}$ ist (vgl. die gestrichelte Linie in der angegebenen Skizze).

Die Summe in (D) erhält somit für j aus $\langle Y - k(n), Y + 1 + k(n)\rangle$ den größten und (bis auf ein Restglied) einen von y unabhängigen Beitrag. Der Beitrag der j aus den beiden Endintervallen $\left(K(n) \leqq |j| \leqq \frac{n}{2}\right)$ ist bedeutungslos, während sich für j aus den beiden Zwischenintervallen ein Beitrag ergibt, der von y abhängt, aber bei geeigneter Wahl von $k(n)$ und $K(n)$ bzw. von $g(n)$ von der Ordnung $o(\log n)$ ist.

Für die Abschätzung der Teilsumme von (D) mit j aus $\langle Y - k(n), Y + 1 + k(n)\rangle$ benötigen wir folgenden

Hilfssatz 3. *Für alle ganzen $\iota \geqq 0$ gilt die Beziehung*

$$\max_{0 \leq \theta \leq 1} \left\{\sin \pi\theta \left(\frac{1}{\iota + \theta} + \frac{1}{\iota + 1 - \theta}\right)\right\} = \frac{4}{2\iota + 1}. \tag{41}$$

Beweis. Wir setzen $\theta = \frac{1}{2} - \vartheta$. Dann ist

$$\sin \pi\theta \left(\frac{1}{\iota + \theta} + \frac{1}{\iota + 1 - \theta}\right) = \cos \pi\vartheta \left(\frac{1}{\iota + \frac{1}{2} - \vartheta} + \frac{1}{\iota + \frac{1}{2} + \vartheta}\right) \tag{42}$$

$$= \frac{(2\iota + 1)\cos \pi\vartheta}{\left(\iota + \frac{1}{2}\right)^2 - \vartheta^2} = \frac{4}{2\iota + 1} \cdot \frac{\cos \pi\vartheta}{1 - \frac{4}{(2\iota + 1)^2}\vartheta^2}. \tag{43}$$

Betrachten wir (43) im Falle $\iota = 0$. Die Funktion

$$f(\vartheta) = \cos \pi\vartheta - (1 - 4\vartheta^2) = f(-\vartheta)$$

hat für $\vartheta = 0$ und für $\vartheta = \frac{1}{2}$ eine Nullstelle; die Ableitung $f'(\vartheta) = -\pi \sin \pi\vartheta + 8\vartheta$ hat in dem offenen Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ genau eine Nullstelle ϑ_0[14]) und ist in dem Intervall $(0, \vartheta_0)$ bzw. $\left(\vartheta_0, \frac{1}{2}\right)$ kleiner bzw. größer als 0. Somit gilt $f(\vartheta) < 0$ und $\frac{\cos \pi\vartheta}{1 - 4\vartheta^2} < 1$ für $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$. Wegen $\left.\frac{\cos \pi\vartheta}{1 - 4\vartheta^2}\right|_{\vartheta = 0} = 1$ und $\lim\limits_{\vartheta \to \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi\vartheta}{1 - 4\vartheta^2} = \frac{\pi}{4} < 1$ nimmt also (43) für $\vartheta = 0$ den größten Wert an, der mit dem in (41) angegebenen Wert für $\iota = 0$ übereinstimmt.

Ist $\iota > 0$, so schreiben wir (43) in der Form

$$\left(\frac{4}{2\iota + 1}\right) \cdot \left(\frac{\cos \pi\vartheta}{1 - 4\vartheta^2}\right) \cdot \left(\frac{1 - 4\vartheta^2}{1 - \frac{4}{(2\iota + 1)^2}\vartheta^2}\right) \qquad \left(0 \leqq \vartheta \leqq \frac{1}{2}\right). \tag{44}$$

Der zweite und dritte Faktor von (44) nehmen für $\vartheta = 0$ den größten Wert 1 und somit (44) den größten Wert $\frac{4}{2\iota + 1}$ an, woraus die Behauptung (41) folgt.

---

[14]) $f'(\vartheta)$ hat nach dem Satz von Rolle mindestens eine Nullstelle. $f'(\vartheta)$ hat aber nicht mehr als eine Nullstelle in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; denn die in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ konkave Kurve $y_1 = \pi \sin \pi\vartheta$ und die Gerade $y_2 = 8\vartheta$, die sich im Punkte 0 treffen, können für $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ höchstens einen Schnittpunkt besitzen.

In der mittleren Teilsumme von (D) mit j aus $\langle Y - k(n), Y + 1 + k(n)\rangle$ fassen wir je zwei Glieder mit dem Index $j = Y - \iota$ und $j = Y + 1 + \iota$ zusammen ($y = Y + \theta$, $0 \leqq \theta < 1$; $0 \leqq \iota \leqq k(n)$):

$$(45) \qquad \delta_\iota = \frac{\left|\sin \pi\left(Y + \theta - \frac{n}{2}\right)\right|}{\pi}\left(G\left(\frac{n}{2}, Y + \theta, Y - \iota\right)\frac{1}{Y + \theta - Y + \iota} + G\left(\frac{n}{2}, Y + \theta, Y + 1 + \iota\right)\frac{1}{-Y - \theta + Y + \iota + 1}\right).$$

Nach (C 4) von Hilfssatz 2 gilt nun $\left(|Y + \theta| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}\right)$

$$G\left(\frac{n}{2}, Y + \theta, Y - \iota\right) = 1 + O\left(\max\left(\frac{1}{\frac{n}{2}}, \frac{(\iota + \theta)\cdot|2Y + \theta - \iota|}{\frac{n}{2}}\right)\right) = 1 + O\left(\max\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\iota}{\sqrt{n}}\right)\right);$$

entsprechend folgt

$$G\left(\frac{n}{2}, Y + \theta, Y + 1 + \iota\right) = 1 + O\left(\max\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\iota}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

so daß

$$(46) \qquad \delta_\iota = \frac{\sin \pi\theta}{\pi}\left(\frac{1}{\iota + \theta} + \frac{1}{\iota + 1 - \theta}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{15)}$$

ist. Somit gilt mit (45/46) und Hilfssatz 3 für die mittlere Teilsumme $\left(\text{hierbei ist } Y - \frac{n}{2} \text{ ganz}\right)$

$$(47) \qquad \frac{\left|\sin \pi\left(Y + \theta - \frac{n}{2}\right)\right|}{\pi}\sum_{j = Y - k(n)}^{Y + 1 + k(n)} \frac{G\left(\frac{n}{2}, Y + \theta, j\right)}{|Y + \theta - j|} = \sum_{\iota = 0}^{k(n)} \delta_\iota$$

$$= \sum_{\iota = 0}^{k(n)} \frac{\sin \pi\theta}{\pi}\left(\frac{1}{\iota + \theta} + \frac{1}{\iota + 1 - \theta}\right) + O\left(\frac{k(n)}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\iota = 0}^{k(n)} \frac{1}{2\iota + 1} + O\left(\frac{k(n)}{\sqrt{n}}\right).$$

Nun ist, wenn γ die Eulersche Konstante bedeutet,

$$\sum_{\iota = 0}^{k} \frac{1}{2\iota + 1} = \sum_{\iota = 1}^{2k+1} \frac{1}{\iota} - \frac{1}{2}\sum_{\iota = 1}^{k} \frac{1}{\iota} = \log(2k + 1) + \gamma - \frac{1}{2}(\log k + \gamma) + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log k + \left(\log 2 + \frac{1}{2}\gamma\right) + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

so daß aus (47)

$$(48) \qquad \frac{2}{\pi}\log k(n) + \frac{4}{\pi}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\gamma\right) + O\left(\max\left(\frac{k(n)}{\sqrt{n}}, \frac{1}{k(n)}\right)\right)$$

wird. Für $k(n) = \left[\frac{\sqrt{n}}{g(n)}\right]$ $\left(g(n) = o(\sqrt{n}),\ g(n) \underset{n \to \infty}{\to} \infty\right)$ gilt

$$\log k(n) = \frac{1}{2}\log n - \log g(n) + O\left(\frac{g(n)}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}\log n - \log g(n) + o(1)$$

---

15) Für $\iota \neq 0$ ist $\frac{1}{\iota + \theta}\cdot O\left(\max\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\iota}{\sqrt{n}}\right)\right) = O\left(\max\left(\frac{1}{\iota\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

und

$$O\left(\max\left(\frac{k(n)}{\sqrt{n}}, \frac{1}{k(n)}\right)\right) = O\left(\max\left(\frac{1}{g(n)}, \frac{g(n)}{\sqrt{n}}\right)\right) = o(1).$$

Somit bekommen wir aus (47/48), wenn wir $Y+\theta$ wieder durch y ersetzen:

$$\frac{\left|\sin\pi\left(y-\frac{n}{2}\right)\right|}{\pi} \sum_{j=Y-k(n)}^{Y+1+k(n)} \frac{G\left(\frac{n}{2}, y, j\right)}{|y-j|} \tag{49}$$
$$= \frac{1}{\pi}\log n - \frac{2}{\pi}\log g(n) + \frac{4}{\pi}\left(\log 2 + \frac{\gamma}{2}\right) + o(1).$$

Für die Berechnung der übrigen Teilsummen benötigen wir eine Abschätzung für $\sum_{j\in\mathfrak{J}(\alpha,\beta)} \frac{1}{j}$, wobei j ganzzahlige Werte des geschlossenen bzw. offenen, halboffenen Intervalls $\langle\alpha, \beta\rangle$ $(\alpha > 1;\ \beta-\alpha > 1)$ durchlaufen soll.

Sei α_1 die erste, β_1 die letzte bei der Summation in Betracht kommende ganze Zahl, dann gilt

$$\sum_{j\in\mathfrak{J}(\alpha,\beta)} \frac{1}{j} = \log\beta_1 + \gamma + O\left(\frac{1}{\beta_1}\right) - \log\alpha_1 - \gamma + O\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)$$
$$= \log\frac{\beta}{\alpha} + \log\left(\frac{\beta_1}{\beta}\frac{\alpha}{\alpha_1}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \quad (\gamma \text{ Eulersche Konstante}) \tag{50}$$
$$= \log\frac{\beta}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Nun berechnen wir die beiden Teilsummen von (D) mit j aus den offenen Intervallen $(Y+1+k(n),\ K(n))$ und $(-K(n),\ Y-k(n))$. Ist $y \geqq 0$[16]), so gilt $j > Y+1+k(n) > y$, und somit ist nach (C 1) von Hilfssatz 2

$$G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) < G\left(\frac{n}{2}, y, y\right) = 1. \tag{51}$$

Für j aus dem zweiten Intervall gilt $|j| \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}$, und wir bekommen wie in (34)

$$G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) \leqq e^{\frac{r^2}{2}}\left(1 + \frac{c_1}{n}\right). \tag{52}$$

Weiter ergibt sich vermöge (50)

$$\sum_{j>Y+1+k(n)}^{j<K(n)} \frac{1}{|y-j|} = \sum_{j>Y+1+k(n)}^{j<K(n)} \frac{1}{|Y+\theta-j|} = \sum_{i>k(n)}^{i<K(n)-Y-1} \frac{1}{i+1-\theta} \tag{53}$$
$$< \sum_{i>k(n)}^{i<K(n)} \frac{1}{i} = \log\frac{K(n)}{k(n)} + O\left(\frac{1}{k(n)}\right) = \log\frac{\sqrt{n}\,g(n)}{\left[\frac{\sqrt{n}}{g(n)}\right]} + O\left(\frac{1}{\left[\frac{\sqrt{n}}{g(n)}\right]}\right)$$
$$= 2\log g(n) + o(1),$$

wegen $g(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $g(n) = o(\sqrt{n})$,

[16]) Für $y < 0$ gelten analoge Überlegungen, wobei man aber für die erste bzw. zweite Teilsumme die Abschätzung für die zweite bzw. erste Teilsumme im Falle $y \geqq 0$ bekommt. Dagegen stimmt (56) wieder in beiden Fällen überein.

und

$$(54)\qquad \sum_{j>-K(n)}^{j<Y-k(n)} \frac{1}{|y-j|} = \sum_{j>-K(n)}^{j<Y-k(n)} \frac{1}{|Y+\theta-j|} = \sum_{\iota>k(n)}^{\iota<K(n)+Y} \frac{1}{\iota+\theta}$$

$$\leqq \sum_{\iota>k(n)}^{\iota<K(n)+Y} \frac{1}{\iota} = \log \frac{K(n)\left(1+\frac{Y}{K(n)}\right)}{k(n)} + O\left(\frac{1}{k(n)}\right).$$

Mit $\log\left(1+\frac{Y}{K(n)}\right) \leqq \log\left(1+\frac{\frac{r}{2}\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,g(n)}\right) = o(1)$ und der Abschätzung (53) folgt aus (54)

$$(55)\qquad \sum_{j>-K(n)}^{j<Y-k(n)} \frac{1}{|Y+\theta-j|} \leqq 2\log g(n) + o(1).$$

Mit (51), (53) und (52), (55) erhalten wir sodann

$$(56)\qquad \frac{\left|\sin\pi\left(y-\frac{n}{2}\right)\right|}{\pi}\left(\sum_{j>Y+k(n)+1}^{j<K(n)} \frac{G\left(\frac{n}{2},\, y,\, j\right)}{|y-j|} + \sum_{j>-K(n)}^{j<Y-k(n)} \frac{G\left(\frac{n}{2},\, y,\, j\right)}{|y-j|}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}\left(e^{\frac{r^2}{2}}\cdot 2\log g(n) + 2\log g(n)\right) + o(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(e^{\frac{r^2}{2}}+1\right)\log g(n) + o(1).$$

Schließlich betrachten wir die Teilsummen von (D) mit j aus den beiden Endintervallen $\left(K(n) \leqq |j| \leqq \frac{n}{2}\right)$. Es ist nach (C 1) und (C 5) von Hilfssatz 2 mit $|y| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}$, $|j| \geqq K(n)$ $\left(K(n) = \sqrt{n}\,g(n),\ g(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty\right)$

$$(57)\qquad G\left(\frac{n}{2},\, y,\, j\right) \leqq G\left(\frac{n}{2},\, \frac{r}{2}\sqrt{n},\, K(n)\right)$$

$$= O\left(\exp\left\{\frac{2}{n}\left(\frac{r^2}{4}n - g(n)^2\cdot n\right)\right\}\right) = O\left(\exp\left\{\frac{r^2}{2} - 2g(n)^2\right\}\right)$$

$$= O\left(\exp\{-2g(n)^2\}\right),$$

und mit (50) bekommt man $\left(K(n) = \sqrt{n}\,g(n);\ g(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty\right)$

$$(58)\qquad \sum_{j\geqq K(n)}^{j\leqq\frac{n}{2}} \frac{1}{|y-j|} = \sum_{j\geqq K(n)}^{j\leqq\frac{n}{2}} \frac{1}{|Y+\theta-j|} = \sum_{\iota\geqq K(n)-Y-1}^{\iota\leqq\frac{n}{2}-Y-1} \frac{1}{\iota+1-\theta}$$

$$\leqq \sum_{\iota\geqq K(n)-Y-1}^{\iota\leqq\frac{n}{2}} \frac{1}{\iota} = \log\frac{\frac{n}{2}}{K(n)-Y-1} + O\left(\frac{1}{K(n)-Y-1}\right)$$

$$= O(\log n),$$

und entsprechend gilt

$$(59)\qquad \sum_{j\geqq-\frac{n}{2}}^{j\leqq-K(n)} \frac{1}{|y-j|} = O(\log n).$$

Somit ergibt sich

$$(60)\qquad \frac{\left|\sin\pi\left(y-\frac{n}{2}\right)\right|}{\pi} \sum_{|j|\geqq K(n)}^{|j|\leqq\frac{n}{2}} \frac{G\left(\frac{n}{2},\, y,\, j\right)}{|y-j|} = O\left(\log n \exp\{-2g(n)^2\}\right).$$

Fassen wir (49), (56) und (60) zusammen, so erhalten wir aus (D)

$$(61)\qquad \Lambda_n(x) = \frac{\left|\sin \pi\left(y - \frac{n}{2}\right)\right|}{\pi} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{G\left(\frac{n}{2}, y, j\right)}{|y-j|}$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}\log n - \frac{2}{\pi}\log g(n) + \frac{4}{\pi}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\gamma\right) + \frac{2}{\pi}\left(e^{\frac{r^2}{2}} + 1\right)\log g(n)$$

$$+ O\left(\log n \cdot \exp\{-2g(n)^2\}\right) + o(1),$$

wobei nach (49) der Koeffizient von $\log n$ nicht verbessert werden kann.

Setzen wir zuletzt $g(n) = \log\log n$, so folgt wegen

$$O\left(\log n \cdot \exp\{-(\log\log n)\, 2\log\log n\}\right) = O\left(\log n \frac{1}{(\log n)^{2\log\log n}}\right) = o(1)$$

aus (61)

$$\Lambda_n(x) \leqq \frac{1}{\pi}\log n + \frac{2}{\pi} e^{\frac{r^2}{2}} \log_3 n + \frac{4}{\pi}\left(\log 2 + \frac{\gamma}{2}\right) + o(1)$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}\log n + \frac{2}{\pi} e^{\frac{r^2}{2}} \log_3 n + C^*(r) \qquad (C^*(r) \text{ unabh. von } n).$$

Damit ist (9) nachgewiesen, so daß der Beweis des Satzes 2 abgeschlossen ist.

5. Einschränkung der Voraussetzungen bei dem Satz über Konvergenzverhalten der Lagrangepolynome.

Nun werden wir uns natürlich fragen, ob nicht die Forderung, die wir in Satz 1 an die Funktion $f(x)$ stellten, eingeschränkt werden kann. Wird es vielleicht nicht genügen, die Stetigkeit bzw. das Vorhandensein der k-ten Ableitung in einer kleinen Umgebung des Nullpunktes zu fordern?

So hat z. B. Szász [13] für das Gelten der Beziehung $\lim_{n\to\infty} L_n(0) = f(0)$ vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ in $\langle -1, 1\rangle$ von beschränkter Schwankung und an der Stelle $x = 0$ stetig sei.

Weiter hat 1957 Frey [4] einen Lokalisationssatz in einem verallgemeinerten Sinne bewiesen, welcher sich nicht auf Punkte, sondern auf Intervalle bezieht. Das läßt sich in wenigen Worten etwa so ausdrücken: Für die Güte der Approximation einer gegebenen Funktion in $\langle -a, a\rangle \subset \langle -1, 1\rangle$, $a > 0$, durch Lagrangesche Interpolationspolynome mit äquidistanten Knoten sind nur die Struktureigenschaften der Funktion in dem etwas größeren Intervall $\langle -a-\delta, a+\delta\rangle \subset \langle -1, 1\rangle$, $\delta > 0$ verantwortlich, im Restintervall muß die Funktion lediglich beschränkt sein. Die Ergebnisse von Frey lassen sich vermöge der Formeln (A) und (B), sogar teilweise in einer schärferen Form, erhalten.

Hierauf wollen wir jedoch nicht näher eingehen, sondern nur die in Satz 1 gemachten Bedingungen so weit wie möglich einschränken.

Satz 3. *Werden die Bedingungen des Satzes 1 dahingehend abgeändert, daß $f(x)$ nur in dem Intervall (dessen Länge für $n \to \infty$ nach 0 geht)*

$$\langle -\xi_n, \xi_n\rangle;\ \xi_n = n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2},\ \varepsilon \text{ unabh. von } n\right)$$

stetig ist und dem Stetigkeitsmodul $\omega(f)$ genügt bzw. daß die k-te Ableitung dem Stetigkeitsmodul $\omega_k(f)$ genügt, während $f(x)$ in dem übrigen Intervall $\langle -1, 1\rangle$ beschränkt ist, so tritt an Stelle des Faktors

$$A(r)\log n + B(r) \quad bzw. \quad \frac{1}{\pi}\log n + \frac{2}{\pi} e^{\frac{r^2}{2}} \log_3 n + C(r)$$

in (5) *der Faktor*

$$A(r)\log n + B(r, M) \quad bzw. \quad \frac{1}{\pi}\log n + \frac{2}{\pi} e^{\frac{r^2}{2}} \log_3 n + C(r) + D(M)\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} n^{2\varepsilon}\right\} \log n$$

$$\left(M = \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x)| + \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \cdot \max_{-\xi_n \leqq x \leqq \xi_n} |f^{(\nu)}(x)|\right).$$

Beweis. Besitzt $f(x)$ eine k-te Ableitung mit dem Stetigkeitsmodul $\omega_k(f)$, dann definieren wir durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x); & -\xi_n \leqq x \leqq \xi_n \qquad \left(\xi_n = n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right) \\ f(\xi_n) + \frac{(x-\xi_n)}{1!} f'(\xi_n) + \cdots + \frac{(x-\xi_n)^k}{k!} f^{(k)}(\xi_n); & \xi_n \leqq x \leqq 1 \\ f(-\xi_n) + \frac{(x+\xi_n)}{1!} f'(-\xi_n) + \cdots + \frac{(x+\xi_n)^k}{k!} f^{(k)}(-\xi_n); & -1 \leqq x \leqq -\xi_n \end{cases}$$

eine Funktion, die k-mal in $\langle -1, 1\rangle$ stetig differenzierbar ist und deren k-te Ableitung $g^{(k)}(x)$ dort dem Stetigkeitsmodul $\omega_k(f)$ genügt (in $\langle -\xi_n, \xi_n\rangle$ nach Voraussetzung, im übrigen Intervall wegen $g^{(k)}(x) = g^{(k)}(\xi_n) = \text{const.}$ bzw. $g^{(k)}(x) = g^{(k)}(-\xi_n) = \text{const.}$).

Für die Funktion $f(x) - g(x)$ gilt die Beziehung

$$(62) \qquad |f(x) - g(x)| \begin{cases} = 0; & -\xi_n \leqq x \leqq \xi_n \\ \leqq |f(x)| + \sum_{\nu=0}^{k} \frac{|x-\xi_n|^\nu}{\nu!} |f^{(\nu)}(\xi_n)|; & \xi_n \leqq x \leqq 1 \\ \leqq |f(x)| + \sum_{\nu=0}^{k} \frac{|x+\xi_n|^\nu}{\nu!} |f^{(\nu)}(-\xi_n)|; & -1 \leqq x \leqq \xi_n. \end{cases}$$

Mit dem in der Behauptung definierten M gilt für (62)

$$(63) \qquad |f(x) - g(x)| \begin{cases} = 0 & -\xi_n \leqq x \leqq \xi_n \\ \leqq M & -1 \leqq x \leqq -\xi_n, \quad \xi_n \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Nun ist aber für $x \in \mathfrak{T}_n$

$$(64) \qquad |L_n[f; x] - f(x)| = |L_n[g + f - g; x] - g(x) - f(x) + g(x)|$$
$$\leqq |L_n[g; x] - g(x)| + |L_n[f - g; x]| + |f(x) - g(x)|.$$

Für $|L_n[g, x] - g(x)|$ gelten nun die aus Satz 1 bekannten Abschätzungen, $|f(x) - g(x)|$ ist, da $\mathfrak{T}_n$ innerhalb von $\langle -\xi_n, \xi_n\rangle$ liegt, gleich Null. So ist nur noch $|L_n[f - g; x]|$ für $x \in \mathfrak{T}_n$ zu bestimmen. Hierfür gilt

$$(65) \qquad L_n[f - g; x] = \bar{L}_n[\bar{f} - \bar{g}, y] = \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \bar{l}_j^{(n)}(y)\left(f\left(\frac{2}{n}j\right) - g\left(\frac{2}{n}j\right)\right)$$

$$(66) \qquad = \sum_{|j| \geqq \xi_n \frac{n}{2}}^{|j| \leqq \frac{n}{2}} \bar{l}_j^{(n)}(y)\left(f\left(\frac{2}{n}j\right) - g\left(\frac{2}{n}j\right)\right) + \sum_{j > -\xi_n \frac{n}{2}}^{j < +\xi_n \frac{n}{2}} \bar{l}_j^{(n)}(y)\left(f\left(\frac{2}{n}j\right) - g\left(\frac{2}{n}j\right)\right).$$

Wegen $f\left(\frac{2}{n}j\right) - g\left(\frac{2}{n}j\right) = 0$ für $\left|\frac{2}{n}j\right| \leqq \xi_n \left(\text{d. h. für } |j| \leqq \xi_n \cdot \frac{n}{2}\right)$ ist die letzte Summe in (66) gleich Null. Somit folgt

$$(67) \qquad |L_n[f-g;x]| \leqq \max_{\xi_n \leq |x| \leq 1} |f(x) - g(x)| \cdot \sum_{|j| \geq \xi_n \frac{n}{2}}^{|j| \leq \frac{n}{2}} |\bar{l}_j^{(n)}(y)|.$$

Nach Formel (A), (C 1) und (C 5) ergibt sich wegen

$$|y| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{n}; \quad |j| \geqq \frac{n}{2}\xi_n = \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

weiter

$$|\bar{l}_j^{(n)}(y)| = O\left(\frac{1}{y-j}\exp\left\{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}\right\}\right)$$

und

$$(68) \qquad \sum_{|j| \geq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}^{|j| \leq \frac{n}{2}} |\bar{l}_j^{(n)}(y)| = O\left(\log n \exp\left\{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}\right\}\right).$$

Mit (63) und (68) bekommen wir so für (67)

$$(69) \qquad |L_n[f-g;x]| \leqq Mc \log n \exp\left\{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}\right\} \quad (c \text{ unabh. von } n)$$

und erhalten schließlich aus (64) mit (69) und Satz 1 (für die Funktion $g(x)$) die Behauptungen des Satzes 3.

6. Bemerkungen über die Größenordnung der Teilintervalle mit günstigen Approximationseigenschaften.

Hier wollen wir noch kurz andeuten, daß es nicht möglich ist, die Größenordnung des in Satz 1 angegebenen Teilintervalls zu verbessern, wenn wir dabei fordern wollen, daß die günstige Approximationseigenschaft der $L_n(x)$, die wir in $\mathfrak{T}_n$ haben, in etwa erhalten bleiben soll.

Wir betrachten hierzu für ein y mit $\frac{n}{2} \geqq |y| \geqq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2};\ \varepsilon \text{ unabh. von } n\right)$ $\left(\text{was dem Wert } x \text{ mit } 1 \geqq |x| \geqq n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right) \text{ aus dem Intervall } \langle -1, 1\rangle \text{ entspricht}\right)$ die Lagrangeschen Grundpolynome, deren Indizes j dem Betrage nach $\leqq n^{\frac{1}{2}}$ sind. Nach (A) gilt, falls wir wieder die Funktion $G\left(\frac{n}{2}, y, j\right)$ verwenden:

$$(70) \qquad |\bar{l}_j^{(n)}(y)| = \frac{\left|\sin \pi\left(y - \frac{n}{2}\right)\right|}{\pi} \frac{1}{|y-j|} G\left(\frac{n}{2}, y, j\right).$$

Nach (C 1) und (C 2) folgt $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$

$$(71) \qquad G\left(\frac{n}{2}, y, j\right) \geqq G\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, n^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\geqq \exp\left\{\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}(1 + \chi(n^{2\varepsilon-1})) - 2\left(1 + \chi\left(\frac{4}{n}\right)\right) + O(n^{2\varepsilon-1})\right\}$$

$$\geqq c_1 \exp\left\{\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}\right\} \qquad (c_1 > 0 \text{ unabh. von } n).$$

Mit $\frac{1}{|y-j|} \geqq \frac{c_2}{n}$ ($c_2 > 0$ unabh. von n) und (71) folgt für (70)

$$|\bar{l}_j^{(n)}(y)| \geqq \left|\sin \pi\left(y - \frac{n}{2}\right)\right| \frac{c_3}{n} \exp\left\{\frac{1}{2} n^{2\varepsilon}\right\}; \quad |y| \geqq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right); \quad |j| \leqq n^{\frac{1}{2}}$$

$$(c_3 > 0 \text{ unabh. von } n)$$

und somit

$$\bar{\Lambda}_n(y) \geqq \frac{c_3}{n} \exp\left\{\frac{1}{2} n^{2\varepsilon}\right\} \left|\sin \pi\left(y - \frac{n}{2}\right)\right|, \quad \frac{n}{2} \leqq |y| \leqq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Wir sehen also, daß für y mit $\frac{n}{2} > |y| \geqq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ bzw. für x mit $1 > |x| \geqq n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ die Funktion $\bar{\Lambda}_n(y) = \Lambda_n(x)$ exponentiell anwächst.

Wir werden somit nicht erwarten können, daß k-mal stetig differenzierbare Funktionen richtig approximiert werden (vgl. Beweis von Satz 1 und Sätze I und II von Jackson).

Tatsächlich lassen sich k-mal stetig differenzierbare Funktionen angeben, für die die Lagrangepolynome mit äquidistanten Knoten (bei hinreichend großem n) für $|y| \geqq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$; $y \in \left\langle -\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right\rangle$ bzw. für $|x| \geqq n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$; $x \in \langle -1, 1 \rangle$ beliebig große Abweichungen haben. Dies werden wir in einer späteren Arbeit zeigen (vgl. hierzu auch die vorläufige Veröffentlichung in den Comptes Rendues [7]).

Literaturverzeichnis.

[1] *N. I. Achieser*, Vorlesungen über Approximationstheorie. Berlin 1953 (Akademie Verlag).

[2] *S. N. Bernstein*, Quelques remarques sur l'interpolation. Math. Ann. **79** (1914), 1—12.

[3] *M. Fréchet*, Sur un défaut de la méthode d'interpolation par les polynomes de Lagrange. Nouv. Ann. de Math. **20** (1920), 241—249.

[4] *T. Frey*, Einige Bemerkungen über äquidistante Lagrangesche Interpolation. Periodica Polytechnica (Budapest) **1** (1957), 237—251.

[5] *F. Lösch, F. Schoblik*, Die Fakultät. Leipzig 1951, S. 6, 7.

[6] *I. P. Natanson*, Konstruktive Funktionentheorie. Berlin 1955 (Akademie Verlag).

[7] *P. O. Runck*, Sur la convergence des polynomes d'interpolation de Lagrange et d'Hermite aux noeuds équidistants. C. R. Acad. Sci. **245** (1957), 1211—1213.

[8] *P. O. Runck*, Über das Konvergenzverhalten der Interpolationsformeln von Lagrange und Hermite mit äquidistanten Knoten. Abstracts Intern. Congr. Edinburgh 1958, S. 67.

[9] *C. Runge*, Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. Z. Math. Phys. **46** (1901), 224—243.

[10] *H. E. Salzer*, Coefficients for Numerical Differentiation with Central Differences. J. of Math. Phys. **22** (1943), 115.

[11] *H. E. Salzer*, Coefficients for Mid Interval Numerical Integration with Central Differences. Philos. Mag (7) **36** (1945), 216—218.

[12] *J. F. Steffensen*, Interpolation. 2nd ed. New York 1950.

[13] *P. Szász*, Az aequidistans interpolációról. Különlenyomat a Matematikai és Fizikai Lapok XLIX, köteből. Budapest 1942, 63—69; insbes. S. 69.

Eingegangen 1. August 1960.

A correction to the paper

An interpolation Series for continuous functions of a p-adic variable.

By *K. Mahler* in Manchester.

Dr. M. A. Maurice of Amsterdam has drawn my attention to a serious error in the proof of Theorem 2 of my paper in vol. **199** (1958), p. 23—34, of this journal. It is stated on p. 29 that one may assume, without loss of generality, that there is a positive integer s such that

$$\left|\frac{a_n}{n}\right|_p \leqq \frac{1}{p} \quad \text{if} \quad p^s \nmid n \text{ and } n \geqq p^s.$$

This statement, unfortunately, is false and invalidates the proof.

I have not succeeded in altering this proof so as to make it correct. Therefore I shall give here a new proof based on entirely different ideas.

The assertion to be proved is as follows.

Theorem 2. *Let $\{a_n\}$ be a p-adic null sequence. If the limit*

$$\lambda = \lim_{|x|_p \to 0} \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n} \binom{x-1}{n-1}$$

extended over all elements $x \neq 0$ of J exists, then:

$$\text{(i)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0,$$

and

$$\text{(ii)} \qquad \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \binom{-1}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{n}.$$

The difficulty lies in the proof of (i). Once this relation has been obtained, the second assertion (ii) follows immediately from the Lemma 4, p. 31, of my paper.

The new proof of (i) runs as follows:

Put

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n}.$$

Since $\{a_n\}$ is a null sequence, $f(x)$ is a continuous function of $x \in I$; moreover,

$$f(0) = 0.$$

Therefore, when $x = 0$ lies in J,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{x}\binom{x}{n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n}\binom{x-1}{n-1}.$$

The hypothesis of Theorem 2 is therefore equivalent to

$$\lim_{\substack{|x|_p \to 0 \\ x \neq 0 \\ x \in J}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{|x|_p \to 0 \\ x \neq 0 \\ x \in J}} \frac{f(x)}{x} = \lambda. \tag{1}$$

We first prove that this limit formula implies the stronger equation

$$\lim_{\substack{|\xi|_p \to 0 \\ \xi \neq 0 \\ \xi \in I}} \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi} = \lim_{\substack{|\xi|_p \to 0 \\ \xi \neq 0 \\ \xi \in I}} \frac{f(\xi)}{\xi} = \lambda, \tag{2}$$

and so means that $f(x)$ is differentiable at $x = 0$ and has the derivative

$$f'(0) = \lambda.$$

The formula (1) holds if and only if, given any positive integer s, there exists a second positive integer t such that

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|_p \leqq p^{-s} \quad \text{if} \quad x \in J, \quad 0 < |x|_p \leqq p^{-t}. \tag{3}$$

We prove (2) by showing that then also

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right|_p \leqq p^{-s} \quad \text{if} \quad \xi \in I, \quad 0 < |\xi|_p \leqq p^{-t}. \tag{4}$$

For let ξ be an arbitrary element of I satisfying

$$0 < |\xi|_p \leqq p^{-t}.$$

If $f(\xi) = 0$, (4) certainly holds; hence we assume that

$$f(\xi) \neq 0.$$

By the hypothesis, $f(x)$ is continuous at $x = \xi$. Therefore a positive integer u exists such that

$$|f(\eta) - f(\xi)|_p < |f(\xi)|_p \quad \text{if} \quad \eta \in I, \quad |\eta - \xi|_p \leqq p^{-u}$$

and hence also

$$|f(\eta)|_p = |f(\xi)|_p \quad \text{if} \quad \eta \in I, \quad |\eta - \xi|_p \leqq p^{-u}.$$

Since ξ is a p-adic integer, we can now determine a positive integer x such that

$$|x - \xi|_p \leqq \min\left(p^{-u}, \frac{1}{p}|\xi|_p\right).$$

Then x satisfies both the equations

$$|f(x)|_p = |f(\xi)|_p \quad \text{and} \quad |x|_p = |\xi|_p,$$

and furthermore

$$0 < |x|_p \leqq p^{-t}.$$

It follows then that

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right|_p = \left|\frac{f(x)}{x}\right|_p \leqq p^{-s},$$

and so the assertion (4) is a direct consequence of (3). —

From now on we may assume that

$$f(0) = 0 \text{ and } f'(0) = \lambda,$$

because the hypothesis of Theorem 2 implies these two formulae. Define a function $g(x)$ by

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, \\ \dfrac{f(x) - \lambda x}{x} & \text{if } x \neq 0, \end{cases} \quad x \in I.$$

As the quotient of two continuous functions $g(x)$ is certainly continuous for all $x \neq 0$; but it is also continuous when $x = 0$ because

$$\lim_{|x|_p \to 0} g(x) = \lim_{|x|_p \to 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \lambda \right) = \lambda - \lambda = 0 = g(0).$$

Hence $g(x)$ is continuous everywhere on I. But then, by Theorem 1 of my paper, it can be written as an interpolation series

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \binom{x}{n}$$

where $\{b_n\}$ is again a p-adic null sequence.

Now, identically in x,

$$f(x) = \lambda x + x g(x) = \lambda \binom{x}{1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x \binom{x}{n},$$

and here

$$x \binom{x}{n} = (x - n) \binom{x}{n} + n \binom{x}{n} = (n+1) \binom{x}{n+1} + n \binom{x}{n},$$

so that

$$f(x) = \lambda \binom{x}{1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left\{ (n+1) \binom{x}{n+1} + n \binom{x}{n} \right\}.$$

On the other hand, also

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n},$$

and the interpolation series for $f(x)$ is unique. Hence, on equating the coefficients of identical binomial coefficients, it follows that

$$a_1 = \lambda + b_0 + b_1; \quad a_2 = 2(b_1 + b_2); \quad a_3 = 3(b_2 + b_3); \ldots.$$

Generally, for $n \geqq 2$,

$$a_n = n(b_{n-1} + b_n).$$

But then

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|_p = \lim_{n \to \infty} |b_{n-1} + b_n|_p = 0,$$

whence the assertion (i).

Eingegangen 27. September 1960.

A note on the modular representations of solvable groups.

By *P. Fong*[1]) at Chicago (Ill.) and *W. Gaschütz* at Kiel.

Introduction.

Let $\mathfrak{G}$ be a finite solvable group of order $|\mathfrak{G}| = g$, and let

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \rhd \mathfrak{G}_1 \rhd \mathfrak{G}_2 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{G}_n = 1$$

be a principal series for $\mathfrak{G}$. Since $\mathfrak{G}$ is solvable, each factor group $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ is a p-elementary abelian group for some prime number p. For each element G in $\mathfrak{G}$, the inner automorphism $X \to G^{-1}XG = X^G$ of $\mathfrak{G}$ induces an automorphism of $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$. If we write $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ additively, then $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ can be interpreted as an irreducible representation module for $\mathfrak{G}$ over the field $K = GF(p)$ of p elements. Such a representation module we call a principal series module, and the corresponding representation a principal series representation.

Let the prime p be fixed, and let $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ be the distinct principal series representations induced on those principal factors of $\mathfrak{G}$ whose orders are divisible by p. In this paper we examine the relation between these representations $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ and the block structure of the group algebra $K(\mathfrak{G})$ of $\mathfrak{G}$ with respect to the field $K = GF(p)$. Suppose

$$K(\mathfrak{G}) = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_t$$

is the decomposition of $K(\mathfrak{G})$ into a sum of indecomposable two-sided ideals B_i of $K(\mathfrak{G})$. An irreducible representation $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{G}$ over K is said to belong to the block B_i of $\mathfrak{G}$ (or of $K(\mathfrak{G})$) if it occurs as a constituent in B_i. In particular, we assume the arrangement is such that the 1-representation of $\mathfrak{G}$ belongs to the 1-block B_1 of $\mathfrak{G}$. The following is our main result:

The representations $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ of $\mathfrak{G}$ belong to the 1-block B_1 of $\mathfrak{G}$. Moreover, every irreducible representation of $\mathfrak{G}$ over K in B_1 will be a constituent of some suitable tensor product of the form

$$\mathfrak{B}_{i_1} \otimes \mathfrak{B}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{B}_{i_s}. \tag{1}$$

Since we shall also prove that the tensor product of two representations in B_1 never involves constituents from blocks of $\mathfrak{G}$ other than B_1, the representations in B_1 can then be characterized as the irreducible constituents over K of all tensor products of the form (1).

[1]) The work of the first author was supported in part by an NSF grant G 9504.

§ 1.

The theorems which we will need from the general modular theory are stated for the most part for absolutely irreducible representations. Rather than reprove their analogues for the case where the field is $K = GF(p)$, we will prove our result via an equivalent one in the case of absolute irreducibility. All representations considered will be modular ones.

Let L be any finite extension of K containing the g-th roots of unity, where $g = |\mathfrak{G}|$. In this section we do not assume $\mathfrak{G}$ is solvable. An irreducible representation $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{G}$ with coefficients in K may become reducible in the larger field L. If it does become so, the representation $\mathfrak{A}$ is then equivalent to one of the form

$$\mathfrak{A} \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_1 & & & 0 \\ & \mathfrak{F}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{F}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

where the $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are distinct absolutely irreducible representations of $\mathfrak{G}$. Let σ be an automorphism in the Galois group $\mathfrak{G}(L/K)$, and denote by $\mathfrak{F}_i^\sigma$ the representation of $\mathfrak{G}$ obtained from $\mathfrak{F}_i$ by applying σ to each coefficient. Then the $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ of (2) constitute a complete set of distinct representations conjugate to a fixed one, say $\mathfrak{F}_1$, under the automorphisms of $\mathfrak{G}(L/K)$. Conversely, given an absolutely irreducible representation $\mathfrak{F}_1$ over L, there exists an irreducible representation $\mathfrak{A}$ over K, unique up to equivalence, having $\mathfrak{F}_1$ as an absolutely irreducible constituent. The proofs of these acts are in [1].

As was done for $K(\mathfrak{G})$, the blocks of $L(\mathfrak{G})$ are defined using the decomposition of the group algebra $L(\mathfrak{G})$ as a sum of indecomposable two-sided ideals. These we denote by $\tilde{B}_i$ and the arrangement is to be such that the 1-representation of $\mathfrak{G}$ belongs to $\tilde{B}_1$.

Lemma 1.1. *Let $\mathfrak{A}$ be an irreducible representation of $\mathfrak{G}$ over K, and let $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ be the absolutely irreducible constituents of $\mathfrak{A}$. Then $\mathfrak{A}$ belongs to the 1-block B_1 of $K(\mathfrak{G})$ if and only if $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ belong to the 1-block $\tilde{B}_1$ of $L(\mathfrak{G})$.*

Proof. Let ε_1 be the central indecomposable idempotent of $K(\mathfrak{G})$ corresponding to the block B_1. As an element of $L(\mathfrak{G})$ ε_1 may no longer be indecomposable. Suppose

$$\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_{i_1} + \tilde{\varepsilon}_{i_2} + \cdots + \tilde{\varepsilon}_{i_s} \tag{3}$$

where the $\tilde{\varepsilon}_{i_j}$ are central indecomposable idempotents of $L(\mathfrak{G})$ corresponding to the blocks $\tilde{B}_{i_j}$. The automorphisms σ of $\mathfrak{G}$ (L/K) act on the $\tilde{\varepsilon}_{i_j}$ in an obvious way, namely, $\tilde{\varepsilon}_{i_j}^\sigma$ is that element of $L(\mathfrak{G})$ obtained from $\tilde{\varepsilon}_{i_j}$ by applaying σ to each coefficient. Each $\tilde{\varepsilon}_i^\sigma$ is clearly a central indecomposable idempotent of $L(\mathfrak{G})$ which appears in the decomposition (3) of ε_1. Let η_k be the sum of the distinct $\tilde{\varepsilon}_{i_j}$ which are in the k-th system of transitivity of this permutation representation of $\mathfrak{G}(L/K)$. Then

$$\varepsilon_1 = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_t \tag{4}$$

But these η_k are central idempotents of $K(\mathfrak{G})$ so that only one η_k can appear in (4), say η_1.

An irreducible representation $\mathfrak{A}$ over K of $\mathfrak{G}$ is in the block B_i of $K(\mathfrak{G})$ if and only if $\mathfrak{A}(\varepsilon_j) = \delta_{ij} I$, where ε_j is the central indecomposable idempotent corresponding to B_j and I is the identity matrix. A similar condition holds for the case of representations

over L. Let $\mathfrak{F}_0$ be the 1-representation of $\mathfrak{G}$. Since $\mathfrak{F}_0(\varepsilon_1) = \mathfrak{F}_0(\tilde{\varepsilon}_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}_1$ must be a summand of ε_1. We will show in fact that $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$. For let $\tilde{\varepsilon}_1 = \sum_G a_G G$, where the coefficients a_G belong to L. If σ is any automorphism of $\mathfrak{G}(L/K)$, then

$$1 = \sum a_G \mathfrak{F}_0(G) = \sum a_G \mathfrak{F}_0^{\sigma^{-1}}(G).$$

Apply σ to both sides.

$$1 = (\sum a_G \mathfrak{F}_0^{\sigma^{-1}}(G))^\sigma = \sum a_G^\sigma \mathfrak{F}_0(G) = \mathfrak{F}_0(\tilde{\varepsilon}_1^\sigma).$$

Therefore $\tilde{\varepsilon}_1^\sigma = \tilde{\varepsilon}_1$ for all σ in $\mathfrak{G}(L/K)$ and $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$. It follows from $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$ that an irreducible representation $\mathfrak{A}$ over K is in B_1 if and only if its absolutely irreducible constituents are in $\tilde{B}_1$.

Lemma 1. 2. *Let $\mathfrak{A}$ be an irreducible representation of $\mathfrak{G}$ over any field of characteristic p. If $\mathfrak{D}$ is a normal p-subgroup of $\mathfrak{G}$, then the kernel of $\mathfrak{A}$ contains $\mathfrak{D}$.*

Proof. By Clifford's theorem [4], we may assume that the restriction of $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{D}$ is a direct sum of irreducible representations of $\mathfrak{D}$. Since $\mathfrak{D}$ is a p-group, the 1-representation is its only irreducible one, and so $\mathfrak{D}$ is contained in the kernel of $\mathfrak{A}$.

The following analogue of a theorem by Burnside is probably well-known, but as far as the authors know, the proof has not been written up in the literature.

Theorem 1. 3. *Let $\mathfrak{B}$ be a faithful representation of $\mathfrak{G}$ over L. Then any given absolutely irreducible representation $\mathfrak{F}$ of $\mathfrak{G}$ must appear as a constituent of some tensor power $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{B} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{B}$ (n times).*

Proof. Let Ψ be the character of $\mathfrak{B}$, and Φ the character of the indecomposable component of $L(\mathfrak{G})$ whose top constituent is $\mathfrak{F}$. (These characters are complex-valued functions defined for the p-regular elements of $\mathfrak{G}$, that is, elements of order prime to p; see [3]). To prove the theorem, it will be sufficient by [3], (20) to prove that for some integer $n > 0$,

$$\sum_X{}' \Psi^n(X)\, \Phi(X^{-1}) \neq 0$$

where the $'$ on the sum means that only p-regular elements X are taken.

Let Ψ assume r distinct non-zero values, say on the elements $V_1, V_2, \ldots, V_r$. Let

$$S_\alpha = \{p\text{-regular } V \text{ in } \mathfrak{G}\colon \Psi(V) = \Psi(V_\alpha)\}$$

for $\alpha = 1, 2, \ldots, r$. Suppose the following is true:

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \Psi^n(V_\alpha) \Big[\sum_{V \text{ in } S_\alpha} \Phi(V^{-1}) \Big] = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, r.$$

Since the determinant of

$$(\Psi^n(V_\alpha)) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, \ldots, r)$$

is non-zero, we must have

$$\sum_{V \text{ in } S_\alpha} \Phi(V^{-1}) = 0 \text{ for } \alpha = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

Let S_1 be the set containing the identity of $\mathfrak{G}$. Suppose V is any other element in S_1, so that $\Psi(V) = \Psi(1)$. Since $\Psi(V)$ is the sum of $\Psi(1)$ complex g-th roots of unity, these roots must then all be 1. Let $\mathfrak{H}$ be the cyclic group generated by V. Because $p \nmid |\mathfrak{H}|$,

the restriction of $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{H}$ must be completely reducible, say

$$\mathfrak{B} \mid \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1 & & & 0 \\ & \mathfrak{Z}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{Z}_t \end{pmatrix}$$

where the $\mathfrak{Z}_i$ are absolutely irreducible representations of $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}$ is abelian so that the $\mathfrak{Z}_i$ are of degree one. Therefore each $\mathfrak{Z}_i$ must be the 1-representation of $\mathfrak{H}$, and $\mathfrak{B}(V) = I$. From the faithfulness of $\mathfrak{B}$, it follows that $V = 1$ and $S_1 = \{1\}$. (5) would then imply that $\Phi(1) = 0$, which is impossible. There exists then, in fact, some integer $n \leqq r$ for which $\mathfrak{F}$ is a constituent of $\mathfrak{B}^n$.

§ 2.

In this section, only solvable groups $\mathfrak{G}$ are considered. Let $\mathfrak{N}$ be the maximal normal p'-subgroup of $\mathfrak{G}$ (a p'-group is one of order prime to p).

Theorem 2. 1. *$L(\mathfrak{G})$ has only one block $\tilde{B}_1$ if and only if the maximal normal p'-subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$ is trivial.*

Proof. Suppose $\mathfrak{N} = 1$. Let $\mathfrak{P}$ be the maximal normal p-subgroup of $\mathfrak{G}$. By Lemma 1. 2. 3 of [5], the centralizer $\mathfrak{C}(\mathfrak{P})$ of $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ is contained in $\mathfrak{P}$. Since $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ is contained in the defect groups $\mathfrak{D}$ of every block of $\mathfrak{G}$ ([2], (9F)). In particular, $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}) \leqq \mathfrak{C}(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{P}$, so that the only p-regular element of $\mathfrak{G}$ which commutes elementwise with $\mathfrak{D}$ is the identity element of $\mathfrak{G}$. It then follows that $\tilde{B}_1$ is the only block of $L(\mathfrak{G})$ ([2], (10C) and (6F)).

Suppose $\mathfrak{N} > 1$. Then

$$\eta = \frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{G \text{ in } \mathfrak{N}} G$$

is a central idempotent of $L(\mathfrak{G})$, and since $\eta \neq 1$, 1 must be the sum of at least two central indecomposable idempotents in $L(\mathfrak{G})$. This shows there exist other blocks besides $\tilde{B}_1$.

Lemma 2. 2. *Let $\mathfrak{F}$ be an absolutely irreducible representation of $\mathfrak{G}$. Then $\mathfrak{F}$ belongs to $\tilde{B}_1$ if and only if its kernel $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \geqq \mathfrak{N}$, where $\mathfrak{N}$ is the maximal normal p'-subgroup of $\mathfrak{G}$.*

Proof. Suppose $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \geqq \mathfrak{N}$. Then $\mathfrak{F}$ is a representation of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, a group which has no non-trivial normal p'-subgroups. $\mathfrak{F}$ therefore belongs to the 1-block of $L(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, and by [2] (9B) it follows easily that $\mathfrak{F}$, as a representation of $\mathfrak{G}$, belongs to $\tilde{B}_1$.

Conversely, suppose $\mathfrak{F}$ is in $\tilde{B}_1$. By Clifford's theorem we may assume the restriction of $\mathfrak{F}$ to $\mathfrak{N}$ breaks up into a direct sum of irreducible representations $\mathfrak{Z}_i$ of $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{F}(G) = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1(G) & & & 0 \\ & \mathfrak{Z}_2(G) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{Z}_t(G) \end{pmatrix} \text{ for } G \text{ in } \mathfrak{N}. \tag{6}$$

The element η in the proof of 2. 1 belongs to the center of $L(\mathfrak{G})$, so that $\mathfrak{F}(\eta) = fI$, where f is a scalar in L. Since $\mathfrak{F}$ and the 1-representation are in the same block, $f = \frac{1}{|\mathfrak{N}|} |\mathfrak{N}| = 1$. (For two representations of $\mathfrak{G}$ are in the same block of $L(\mathfrak{G})$ if and

only if they represent the center of $L(\mathfrak{G})$ in the same way.) But consider η as an element of $L(\mathfrak{N})$. Since $p \nmid |\mathfrak{N}|$, the modular theory for $\mathfrak{N}$ is the same as the complex theory. Thus the 1-block of $L(\mathfrak{N})$ consists of only the 1-representation of $\mathfrak{N}$, and its corresponding idempotent in $L(\mathfrak{N})$ is η ([6], (8)). It then follows from (6) that each $\mathfrak{Z}_i(\eta) = 1$ so that $\mathfrak{Z}_i$ belongs to the 1-block of $\mathfrak{N}$. Each $\mathfrak{Z}_i$ is therefore the 1-representation of $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \geqq \mathfrak{N}$.

Lemma 2. 3. *Let $\mathfrak{B}_i$ be a principal series representation (for the prime p) of $\mathfrak{G}$. Then the absolutely irreducible constituents of $\mathfrak{B}_i$ belong to the 1-block $\tilde{B}_1$ of $L(\mathfrak{G})$.*

Proof. By 2. 2 and 1. 1 it will be enough to show that $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_i)$, where $\mathfrak{K}(\mathfrak{B}_i)$ is the kernel of $\mathfrak{B}_i$. Construct a principal series for $\mathfrak{G}$ from the normal series $1 \trianglelefteq \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$, where $\mathfrak{N}$ is the maximal normal p'-subgroup of $\mathfrak{G}$. Such a principal series can be used for defining $\mathfrak{B}_i$ by the Jordan-Hölder Theorem. From this it is immediate that $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_i)$.

Lemma 2. 4. *Let $\mathfrak{F}_1$ and $\mathfrak{F}_2$ be two absolutely irreducible representations of $\mathfrak{G}$ in $\tilde{B}_1$. Then the absolutely irreducible constituents of $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$ also belong to $\tilde{B}_1$.*

Proof. Since $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{F}_1)$ and $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{F}_2)$, $\mathfrak{N}$ is contained in the kernel of $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$, and is therefore contained in the kernel of each absolutely irreducible constituent of $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$.

We shall say a representation $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{G}$ generates the absolutely irreducible representations $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_s$ of $\mathfrak{G}$ if

(i) each $\mathfrak{F}_i$ appears as an absolutely irreducible constituent of some tensor power $\mathfrak{B}^n$ of $\mathfrak{B}$,

(ii) no other absolutely irreducible representations besides $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_s$ appear as constituents in the tensor powers $\mathfrak{B}^n$ of $\mathfrak{B}$.

Theorem 2. 5. *Let $\mathfrak{G}$ be a finite solvable group. Then there exist normal subgroups $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{S}$ of $\mathfrak{G}$ such that*

(i) $\mathfrak{G} \trianglerighteq \mathfrak{R} \trianglerighteq \mathfrak{S}$,

(ii) *$\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ is a p-elementary abelian group,*

(iii) *The representation $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{G}$ induced by transformation on $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ generates the absolutely irreducible representations in $\tilde{B}_1$.*

Proof. The proof is by induction. Suppose the maximal normal p'-subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$ is non-trivial. By 2. 2 the representations of $\mathfrak{G}$ in $\tilde{B}_1$ are all the absolutely irreducible representations of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. By induction there exist normal subgroups $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{S}$ of $\mathfrak{G}$ such that

(i) $\mathfrak{G} \trianglerighteq \mathfrak{R} \trianglerighteq \mathfrak{S} \trianglerighteq \mathfrak{N}$,

(ii) $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ is a p-elementary abelian group,

(iii) The representation $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ induced on $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ will generate the representations in the 1-block of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. But the 1-block of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ consists of all the absolutely irreducible representations of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ by 2. 1. As a representation of $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ therefore generates the representations in $\tilde{B}_1$.

Assume $\mathfrak{N} = 1$, and let $\mathfrak{P}$ be the maximal normal p-subgroup of $\mathfrak{G}$. If $\Phi(\mathfrak{P})$ is the Frattini subgroup of $\mathfrak{P}$, it follows by Lemma 1. 2. 5 of [4] $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ operates faithfully by transformation on the p-elementary abelian group $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$. Take $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$ and $\mathfrak{S} = \Phi(\mathfrak{P})$. Properties (i) and (ii) of 2. 5. are obviously true for this choice of $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{S}$. By 1. 3 $\mathfrak{B}$ will generate all the absolutely irreducible representations of $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$, and therefore by 1. 2

$\mathfrak{B}$ will generate all the absolutely irreducible representations of $\mathfrak{G}$. Since $L(\mathfrak{G})$ has only one block, $\mathfrak{B}$ indeed generates the representations in $\tilde{B}_1$.

Theorem 2. 6. *Let $\mathfrak{G}$ be a solvable group, and let $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ be the distinct principal series representations induced on those principal factors whose orders are divisible by p. Then the representations $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ belong to the 1-block B_1 of $K(\mathfrak{G})$, where $K = GF(p)$. Moreover, any given irreducible representation of $\mathfrak{G}$ in B_1 occurs as a constituent of some suitabe tensor product of the form*

$$\mathfrak{B}_{i_1} \otimes \mathfrak{B}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{B}_{i_s}. \tag{7}$$

Finally, no irreducible representation over K not in B_1 can occur as a constituent in tensor products of the form (7).

Proof. This follows immediately from 1. 1, 2. 3, 2. 4, and 2. 5.

References.

[1] *R. Brauer*, Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, Math. Zeitschr. **30** (1929), 79—107.
[2] *R. Brauer*, Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, Math. Zeitschr. **63** (1956), 406—444.
[3] *R. Brauer* and *C. Nesbitt*, On the modular characters of groups, Ann. of Math. **42** (1941), 556—590.
[4] *A. H. Clifford*, Representations induced in an invariant subgroup, Ann. of Math. **38** (1937), 533—550.
[5] *P. Hall* and *G. Higman*, On the *p*-length of *p*-soluble groups, Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 1—42.
[6] *M. Osima*, Notes on blocks of group characters, Math. J. Okayama Univ. **4** (1955), 175—188.

Eingegangen 4. November 1960.

Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. III.

Von *G. J. Rieger* in Lafayette (Ind., U. S. A.).

In den beiden vorausgegangenen Teilen dieser Arbeit [21] habe ich die für den Körper P der rationalen Zahlen von A. Selberg entwickelte Siebmethode zu einem Siebverfahren für ganze Ideale nach Primidealen in einem algebraischen Zahlkörper K verallgemeinert. In dieser Fortsetzung beschäftigen wir uns mit der Aussiebung von ganzen Zahlen nach Primidealen in K. Wir behalten die früheren Bezeichnungen im wesentlichen bei und setzen auch die Numerierung fort. Die auftretenden Konstanten c und die Konstanten in den O-Gliedern hängen nur von K ab.

Zunächst sieht man sofort ein, daß die Schlüsse im Beweis von Satz 1 bzw. Satz 1′ in allen Teilen wörtlich gültig bleiben, wenn man die ganzen Ideale $\mathfrak{n}$ durch ganze Zahlen ξ von K ersetzt. Daher gilt

Satz 14. *Es sei t eine positive Zahl und $M = M(t)$ eine natürliche Zahl > 1; ξ durchlaufe die M nicht notwendig verschiedenen ganzen Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_M$ aus* K; *ferner seien $z, f(\mathfrak{d}), f_1(\mathfrak{r}), Z, \lambda(\mathfrak{d})$ wie in Satz 1 erklärt;*

$$S^* \doteq U(\xi;\ \mathfrak{p} \nmid \xi \text{ für } \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z)\,^{1)},$$

$$S^*_{\mathfrak{d}} \doteq N(\xi;\ \mathfrak{d} \mid \xi),$$

$$R^*_{\mathfrak{d}} \doteq S^*_{\mathfrak{d}} - \frac{t}{f(\mathfrak{d})},$$

$$R^* \doteq \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqq z \\ \mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqq z}} |\, \lambda(\mathfrak{d}_1)\, \lambda(\mathfrak{d}_2)\, R^*_{[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]} \,|;$$

dann gilt

$$S^* \leqq \frac{t}{Z} + O(R^*). \tag{80}$$

Bekanntlich [2]) existiert eine positive Konstante c_1 mit folgender Eigenschaft: zu jeder ganzen Zahl α_0 aus K läßt sich eine Einheit ε aus K derart finden, daß für $\alpha \doteq \varepsilon\alpha_0$ gilt

$$|\, \alpha^{(j)} \,| < c_1 \,|\, \mathfrak{N}\alpha \,|^{\frac{1}{n}} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{81}$$

---

[1]) Der Stern deutet an, daß das frühere S durch sein Analogon ersetzt wurde. $\doteq$ bedeutet $=$ per definitionem. Auch schreiben wir jetzt $N(\ldots;\ldots)$ an Stelle des früheren $N(\ldots,\ldots)$.

[2]) Vgl. etwa [19], 407.

Eine ganze Zahl mit (81) heiße zulässig; eine beliebige ganze Zahl aus K kann also durch Multiplikation mit einer Einheit in eine zulässige Zahl übergeführt werden. Für eine zulässige Zahl α gilt wegen (81) auch

$$|\alpha^{(j)}| > c_2 |\mathfrak{N}\alpha|^{\frac{1}{n}}, \quad c_2 \doteq c_1^{1-n}. \tag{82}$$

Ferner[3]) existiert eine positive Konstante c_3 mit folgender Eigenschaft: zu jedem ganzen Ideal $\mathfrak{f}$ läßt sich eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit

$$|\alpha_k^{(j)}| < c_3 \mathfrak{N}\mathfrak{f}^{\frac{1}{n}} \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{83}$$

finden. Wir nennen sie eine zulässige Basis von $\mathfrak{f}$.

Für die beabsichtigten Anwendungen von Satz 14 brauchen wir ein Analogon zu (32), das im wesentlichen auf Rademacher zurückgeht[4]) (Hilfssatz 10) und beträchtlich einfacher als eine Abschätzung (32) durch eine direkte Gitterpunktzählung bewiesen werden kann (Hilfssatz 9).

Hilfssatz 9. *Die (n, n)-Matrix $\mathfrak{A} = (a_{jk})$ habe r_1 reelle und $2r_2$ komplexe Zeilen; die $(r_1 + r_2 + j)$-te Zeile sei konjugiert-komplex zur $(r_1 + j)$-ten Zeile $(j = 1, \ldots, r_2)$; $|\det \mathfrak{A}| \doteq A > 0$; ferner sei*

$$|a_{jk}| < uA^{\frac{1}{n}} \doteq g \tag{84}$$

mit einer gewissen positiven Konstanten u; außerdem seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ beliebige reelle Zahlen mit

$$\begin{aligned} 0 < a_{r_1+j} &= a_{r_1+r_2+j} && (j = 1, \ldots, r_2), \\ b_{r_1+j} &= b_{r_1+r_2+j} && (j = 1, \ldots, r_2), \\ b_j - a_j &> vV^{\frac{1}{n}} && (j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{85}$$

mit einer gewissen positiven Konstanten v und

$$V \doteq \pi^{r_2} \prod_{j=1}^{r_1} (b_j - a_j) \prod_{k=1}^{r_2} (b_{r_1+k}^2 - a_{r_1+k}^2); \tag{86}$$

es seien noch $c_1, \ldots, c_{r_1}$ beliebige reelle und $c_{r_1+1}, \ldots, c_n$ beliebige komplexe Zahlen mit $c_{r_1+r_2+j} = \overline{c_{r_1+j}}$ $(j = 1, \ldots, r_2)$; schließlich sei L die Anzahl der Gitterpunkte $(x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\begin{aligned} a_j &\leqq \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + c_j \leqq b_j && (j = 1, \ldots, r_1), \\ a_j &\leqq \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + c_j \right| \leqq b_j && (j = r_1 + 1, \ldots, n); \end{aligned} \tag{87}$$

für

$$V \geqq \left(\frac{8nu}{v}\right)^n A \tag{88}$$

gilt dann

$$\left| 2^{r_2} L - \frac{V}{A} \right| \leqq 8 \frac{u}{v} \left(\frac{V}{A}\right)^{1-\frac{1}{n}}. \tag{89}$$

---

[3]) Vgl. etwa [19], 406.

[4]) Vgl. [20].

Beweis. Die Gleichungen

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + c_j \qquad (j = 1, \ldots, r_1),$$

$$X_j = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + c_j\right) \qquad (j = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2),$$

$$X_j = \Im\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + c_j\right) \qquad (j = r_1 + r_2 + 1, \ldots, n)$$

definieren eine affine Abbildung des x-Raumes auf den X-Raum; die einfache und lückenlose Überdeckung des x-Raumes durch achsenparallele (halboffene) Einheitswürfel mit einem Gitterpunkt als Mittelpunkt geht dabei in eine einfache und lückenlose Überdeckung des X-Raumes durch kongruente (halboffene) Parallelotope vom Volumen $2^{r_2} A$ über; ein solches Parallelotop heiße wesentlich, wenn es das Bild eines Würfels ist, dessen Mittelpunkt bei L mitgezählt wird. Die Ungleichungen (87) lauten jetzt

$$a_j \leqq X_j \leqq b_j \qquad (j = 1, \ldots, r_1),$$

$$a_j^2 \leqq X_j^2 + X_{r_2+j}^2 \leqq b_j^2 \qquad (j = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2).$$

Die so definierte Punktmenge $\mathfrak{M}$ des X-Raumes hat das Volumen V, wie man sofort nachrechnet. Die Punktmengen $\mathfrak{M}_*$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ des X-Raumes definieren wir vermöge

$$a_j + 2g \leqq X_j \leqq b_j - 2g \qquad (j = 1, \ldots, r_1),$$

$$(a_j + 2g)^2 \leqq X_j^2 + X_{r_2+j}^2 \leqq (b_j - 2g)^2 \qquad (j = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2)$$

unter Beachtung von (85) und (88) bzw.

$$a_j - 2g \leqq X_j \leqq b_j + 2g \qquad (j = 1, \ldots, r_1),$$

$$(\max(0, a_j - 2g))^2 \leqq X_j^2 + X_{r_2+j}^2 \leqq (b_j + 2g)^2 \qquad (j = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2).$$

Für das Volumen V_* von $\mathfrak{M}_*$ bzw. V^* von $\mathfrak{M}^*$ gilt

$$V_* = \pi^{r_2} \prod_{j=1}^{r_1} (b_j - a_j - 4g) \prod_{k=1}^{r_2} ((b_{r_1+k} - 2g)^2 - (a_{r_1+k} + 2g)^2), \tag{90}$$

$$V^* = \pi^{r_2} \prod_{j=1}^{r_1} (b_j - a_j + 4g) \prod_{k=1}^{r_2} ((b_{r_1+k} + 2g)^2 - (a_{r_1+k} - 2g)^2). \tag{91}$$

Wegen (84) läßt sich jedes Parallelotop der obigen Überdeckung des X-Raumes in einer achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $2g$ einschließen. Für die Vereinigung $\mathfrak{B}$ allen wesentlichen Parallelotope gilt daher $\mathfrak{M}_* < \mathfrak{B} < \mathfrak{M}^*$, woraus

$$V_* \leqq 2^{r_2} A L \leqq V^* \tag{92}$$

folgt. Wegen (86), (90), (91), (84), (85) ist

$$\left(1 - \frac{4u}{v}\left(\frac{A}{V}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \leqq \frac{V_*}{V} \leqq 1, \tag{93}$$

$$1 \leqq \frac{V^*}{V} \leqq \left(1 + \frac{4u}{v}\left(\frac{A}{V}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n. \tag{94}$$

Wegen

$$|(1+a)^n - 1| \leqq 2n\,|a| \qquad \left(|a| \leqq \frac{1}{2n}\right)$$

folgt aus (92), (93), (94) die Behauptung.

Hilfssatz 10. *Für jede zulässige Zahl ζ aus K und jedes ganze Ideal aus K samt allen zugehörigen $\mathfrak{N}\mathfrak{f}$ Restklassen γ mod $\mathfrak{f}$ gilt*[5])

$$N(\xi;\, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f},\ |\xi| < |\zeta|) = c_4 \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}} + O\left(1 + \left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right),$$

$$c_4 \doteq 2^{r_1 - r_2}\pi^{r_2}\,|\Delta|^{1-\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Es sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine zulässige Basis von $\mathfrak{f}$; in Hilfssatz 9 sei jetzt

$$\begin{aligned}
a_{jk} &\doteq \alpha_k^{(j)} && (j, k = 1, \ldots, n),\\
a_j &\doteq \begin{cases} -|\zeta^{(j)}| & (j = 1, \ldots, r_1)\\ 0 & (j = r_1 + 1, \ldots, n),\end{cases}\\
b_j &\doteq |\zeta^{(j)}| && (j = 1, \ldots, n),\\
c_j &\doteq \gamma^{(j)} && (j = 1, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Dann wird

$$\begin{aligned}
V &= 2^{r_1}\pi^{r_2}\,|\mathfrak{N}\zeta|,\\
A &= \sqrt{|\Delta|}\,\mathfrak{N}\mathfrak{f}, \qquad (95)\\
L &= N(\xi;\, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f},\ |\xi| < |\zeta|).
\end{aligned}$$

Alle Voraussetzungen von Hilfssatz 9 sind erfüllt; wegen (88), (89) folgt daher Hilfssatz 10 für $|\mathfrak{N}\zeta| \geqq c_5\mathfrak{N}\mathfrak{f}$. Ist dagegen $|\mathfrak{N}\zeta| \leqq c_5\mathfrak{N}\mathfrak{f}$, so gilt $|\zeta| = O\left(\mathfrak{N}\mathfrak{f}^{\frac{1}{n}}\right)$; wegen (92) ist

$$2^{r_2}AL \leqq V^*.$$

Aus (91), (84), (95) folgt $V^* = O(\mathfrak{N}\mathfrak{f})$ und daher $L = O(1)$, was noch zu zeigen war.

Wenden wir die Überlegungen des vorigen Beweises auf die 2^{r_1} Mengen

$$\begin{aligned}
z &\leqq \pm\xi^{(j)} \leqq |\zeta^{(j)}| && (j = 1, \ldots, r_1),\\
z &\leqq |\xi^{(j)}| \leqq |\zeta^{(j)}| && (j = r_1 + 1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

an, so folgt

Hilfssatz 11. *Ist ζ eine beliebige zulässige Zahl aus K und ist z eine beliebige reelle Zahl mit*

$$0 \leqq z \leqq |\mathfrak{N}\zeta|^{\frac{1}{2}},$$

so gilt für jedes ganze Ideal $\mathfrak{f}$ aus K und alle zugehörigen $\mathfrak{N}\mathfrak{f}$ Restklassen γ mod $\mathfrak{f}$ die Abschätzung

$$N\left(\xi;\, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f},\ z^{\frac{1}{n}} < |\xi| < |\zeta|\right) = c_4 \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}} + O\left(1 + \left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{1-\frac{1}{2n}}\right).$$

---

[5]) $a\,|\xi| < b\,|\xi|$ mit reellen Zahlen a und b bedeutet $a\,|\xi^{(j)}| \leqq b\,|\xi^{(j)}|$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Zusatz. Man sieht sofort ein: Ersetzt man die Bedingung $z < |\xi| < |\zeta|$ durch $z < |\xi| < t|\zeta|$ $(t > 0)$ bzw. $z < |\xi + \gamma|$, $|\xi| < |\zeta|$ (γ aus K, ganz), so bleibt Hilfssatz 11 gültig, wenn man c_4 durch $c(t)$ bzw. $c(\gamma)$ ersetzt.

Wir beweisen jetzt in direkter Verallgemeinerung eines Satzes von Brun und Titchmarsh[6]) den

Satz 15. *Es existiert eine positive Konstante c_6 derart, daß für alle zulässigen Zahlen ζ aus* K *mit* $|\mathfrak{N}\zeta| > 1$ *und alle ganzen Ideale* $\mathfrak{f}$ *aus* K *mit* $\mathfrak{N}\mathfrak{f} < |\mathfrak{N}\zeta|$ *samt allen zugehörigen* $\varphi(\mathfrak{f})$ *primen Restklassen* γ *mod* $\mathfrak{f}$ *gilt*

$$N(\xi; \langle\xi\rangle \text{ prim}, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|) < c_6 \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\varphi(\mathfrak{f}) \log \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}}. \tag{96}$$

Beweis. In Satz 14 wählen wir für $\xi_1, \ldots, \xi_M$ die Menge aller ganzen Zahlen ξ aus K mit $\xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}$, $|\xi| < |\zeta|$. Dann wird

$$M = N(\xi; \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|),$$

$$S^* = N(\xi; \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|, \mathfrak{p} \nmid \xi \text{ für } \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z), \tag{97}$$

$$S_{\mathfrak{d}}^* = N(\xi; \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|, \xi \equiv 0 \bmod \mathfrak{d}); \tag{98}$$

$$z \doteq \left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{\frac{1}{3n}}. \tag{99}$$

Wegen $(\gamma, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist die simultane Kongruenz

$$\xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f},$$
$$\xi \equiv 0 \bmod \mathfrak{d}$$

dann und nur dann lösbar (und zwar dann durch eine Restklasse mod $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$), wenn $(\mathfrak{d}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist; mit

$$\omega(\mathfrak{d}) \doteq \begin{cases} 1 & \text{für } (\mathfrak{d}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \\ 0 & \text{für } (\mathfrak{d}, \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o} \end{cases}$$

folgt aus (98) wegen Hilfssatz 10 unmittelbar

$$S_{\mathfrak{d}} = \omega(\mathfrak{d}) \left(c_4 \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}} + O\left(\left(\frac{\mathfrak{N}\zeta}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{1-\frac{1}{n}} \right) \right).$$

Daher wird

$$t = c_4 \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}, \tag{100}$$

$$\frac{1}{f(\mathfrak{d})} = \frac{\omega(\mathfrak{d})}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}},$$

$$R_{\mathfrak{d}}^* = O\left(\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{1-\frac{1}{n}} \right) \omega(\mathfrak{d}).$$

Alle Voraussetzungen von Satz 15 und Satz 2 sind erfüllt, wenn wir in (24) noch

$$R' = O\left(\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{1-\frac{1}{n}} \right) \tag{101}$$

[6]) Vgl. etwa [3], 2. Satz 4. 1 und unseren obigen Satz 5.

an Stelle von $R' = O(\psi(x, \mathfrak{f}))$ wählen und wenn wir noch

$$M \geqq 2, \quad z \geqq 2 \tag{102}$$

voraussetzen; aus (80), (100), (40), (101), (39), (25) folgt dann über (97) hinaus

$$\begin{aligned} S^* &= O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\varphi(\mathfrak{f}) \log z}\right) + O\left(\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{1-\frac{1}{n}} z^2 \log z\right) \\ &= O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\varphi(\mathfrak{f}) \log \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}}\right) \end{aligned} \tag{103}$$

wegen (99), und die Bedingungen (102) sind sicherlich für

$$\mathfrak{N}\mathfrak{f} \leqq c_7 |\mathfrak{N}\zeta| \qquad (0 < c_7 < 1) \tag{104}$$

erfüllt. Wegen (97) werden bei S^* sicherlich alle diejenigen ganzen Zahlen $\xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}$ mitgezählt, für die $\langle\xi\rangle$ prim und $|\mathfrak{N}\xi| > z$, $|\xi| < |\zeta|$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} N(\zeta) &= N(\xi; \langle\xi\rangle \text{ prim}, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\xi|) \\ &\leqq N(\xi; \langle\xi\rangle \text{ prim}, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|, |\mathfrak{N}\xi| \leqq z) + S^*, \end{aligned} \tag{105}$$

was trivialerweise

$$\begin{aligned} &\leqq N(\xi; \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|, |\mathfrak{N}\xi| \leqq z) + S^* \\ &\leqq N(\xi; \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|) - N(\xi; \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, z^{\frac{1}{n}} < |\xi| < |\zeta|) + S^* \end{aligned} \tag{106}$$

ist. Aus (105), (106), Hilfssatz 11 folgt (96) unter Voraussetzung von (104).

Für $\mathfrak{N}\mathfrak{f} > c_7 |\mathfrak{N}\zeta|$ ist aber

$$\begin{aligned} N(\zeta) &\leqq N(\xi; \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < |\zeta|) \\ &= O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right) \qquad \text{(wegen Hilfssatz 10)} \\ &= O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f} \log \frac{1}{c_7}}\right) \\ &= O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\varphi(\mathfrak{f}) \log \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}}\right) \end{aligned}$$

und daher (96) trivialerweise richtig. Damit ist Satz 15 bewiesen.

Es liegt nahe, in Verallgemeinerung eines Satzes von Linnik noch folgendes zu vermuten*):

Vermutung. *Es existiert eine nur von* K *abhängige Konstante c derart, daß für jedes ganze Ideal* $\mathfrak{f}$ *aus* K *und jede prime Restklasse* γ *mod* $\mathfrak{f}$ *gilt*

$$N(\xi; \langle\xi\rangle \text{ prim}, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < \mathfrak{N}\mathfrak{f}^c) > 0.$$

---

*) Zusatz bei der Korrektur (19. April 1961). Die im Anschluß an Satz 11 oben (vgl. [21], 168) ausgesprochene entsprechende Vermutung für Primideale in Idealklassen mod f statt Primzahlen in primen Restklassen mod f konnte ich inzwischen bestätigen (vgl. meine demnächst in Bull. Amer. Math. Soc. erscheinende Note: On the prime ideals of smallest norm in an ideal class mod f of an algebraic number field).

Für eine weitere Anwendung von Satz 14 und Satz 2 brauchen wir[7])

Hilfssatz 12. *Für jede beliebige ganze Zahl ζ aus* K *mit*

$$|\zeta| < c_8 |\mathfrak{N}\zeta|^{\frac{1}{n}}, \quad c_8 \doteq 6c_1^n \tag{107}$$

und jedes ganze Ideal $\mathfrak{f}$ *aus* K *samt allen zugehörigen* $\mathfrak{N}\mathfrak{f}$ *Restklassen* γ *mod* $\mathfrak{f}$ *gilt*

$$N(\xi;\, \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f},\ |\xi| < c_8|\zeta|,\ |\zeta - \xi| < c_8|\zeta|) = c_9 \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}} + O\left(1 + \left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\mathfrak{N}\mathfrak{f}}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right).$$

Satz 16. *Für jede beliebige ganze Zahl ζ aus* K *mit* (107) *und* $|\mathfrak{N}\zeta| > 1$ *gilt*

$$N(\eta;\, \langle\eta\rangle \text{ prim},\ \langle\zeta-\eta\rangle \text{ prim},\ |\eta| < c_8|\zeta|,\ |\zeta-\eta| < c_8|\zeta|)$$
$$< c_{10} \frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\log^2|\mathfrak{N}\zeta|} \prod_{\mathfrak{p}|\zeta}\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right).$$

Mit anderen Worten: die Anzahl der Lösungen in ganzen Zahlen ξ, η aus K *von*

$$\xi + \eta = \zeta \qquad (\langle\xi\rangle \text{ prim},\ \langle\eta\rangle \text{ prim})$$
$$|\xi| < c_8|\zeta|,\ |\eta| < c_8|\zeta|$$

ist

$$O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\log^2|\mathfrak{N}\zeta|} \sum_{\mathfrak{a}|\zeta} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}}\right).$$

Beweis. In Satz 14 wählen wir für $\xi_1, \ldots, \xi_M$ die Menge aller ganzen Zahlen $\eta(\zeta - \eta)$ mit $|\eta| < c_8|\zeta|$, $|\zeta - \eta| < c_8|\zeta|$. Dann wird

$$M = N(\eta;\, |\eta| < c_8|\zeta|,\ |\zeta-\eta| < c_8|\zeta|) \tag{108}$$

$$S^* = N(\eta;\, |\eta| < c_8|\zeta|,\ |\zeta-\eta| < c_8|\zeta|,\ \mathfrak{p} \nmid \eta(\zeta-\eta) \text{ für } \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z), \tag{109}$$

$$S_{\mathfrak{d}}^* = N(\eta;\, |\eta| < c_8|\zeta|,\ |\zeta-\eta| < c_8|\zeta|,\ \mathfrak{d} \mid \eta(\zeta-\eta)) \tag{110}$$

$$z \doteq |\mathfrak{N}\zeta|^{\frac{1}{3n}}. \tag{111}$$

$\omega(\mathfrak{d})$ sei definiert als die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$\eta(\zeta - \eta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{d};$$

$\omega(\mathfrak{d})$ ist multiplikativ (auf Grund des Hauptsatzes über simultane Kongruenzen) und

$$\omega(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 2 & \text{für } \mathfrak{p} \nmid \zeta, \\ 1 & \text{für } \mathfrak{p} \mid \zeta. \end{cases} \tag{112}$$

Daher wird wegen (110) und Hilfssatz 12

$$t = c_9|\mathfrak{N}\zeta|, \tag{113}$$

$$\frac{1}{f(\mathfrak{d})} = \frac{\omega(\mathfrak{d})}{\mathfrak{N}\mathfrak{d}},$$

$$R_{\mathfrak{d}} = R'\omega(\mathfrak{d}),$$

$$R' = O\left(|\mathfrak{N}\zeta|^{1-\frac{1}{n}}\right). \tag{114}$$

---

[7]) Vgl. [20] und [22], (6).

Alle Voraussetzungen von Satz 14 und Satz 2 sind erfüllt, wenn wir noch

$$M \geqq 2, \quad z \geqq 2 \tag{115}$$

voraussetzen; aus (80), (113), (114), (25) folgt

$$\begin{aligned} S^* &= O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{Z}\right) + O\left(|\mathfrak{N}\zeta|^{1-\frac{1}{n}} z^2 \prod_{\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-2}\right) \\ &= O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{Z}\right) + O\left(|\mathfrak{N}\zeta|^{1-\frac{1}{n}} z^2 \log^4 z\right) \end{aligned} \tag{116}$$

wegen (112) und Hilfssatz 4. Nun ist

$$d(\mathfrak{a}) \doteq \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} 1$$

eine multiplikative Funktion:

$$d(\mathfrak{p}^a) = a + 1 \leqq 2^a. \tag{117}$$

In den Bezeichnungen von (22) sei

$$\mathfrak{m}' = \prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{m} \\ \mathfrak{p}|\zeta}} \mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{m}'' \doteq \prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{m} \\ \mathfrak{p}\nmid\zeta}} \mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}}; \tag{118}$$

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'\mathfrak{m}''$. Wegen Satz 2, (112), (117) ist

$$\begin{aligned} Z &\geqq \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{m} \leqq z} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{m}} \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} \omega^{m_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) \\ &= \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{m} \leqq z} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{m}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}''} 2^{m_\mathfrak{p}} \\ &\geqq \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{m} \leqq z} \frac{d(\mathfrak{m}'')}{\mathfrak{N}\mathfrak{m}} \\ &\geqq \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{a} \leqq \sqrt{z}} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{b} \leqq \sqrt{z}} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{b}}; \end{aligned} \tag{119}$$

denn es ist $\mathfrak{N}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leqq z$, und in der Bezeichnung von (118) ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ und daher $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})' = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})'' = \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''$; ein Ideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{m} \leqq z$ läßt sich also auf höchstens $1 \cdot d(\mathfrak{m}'')$ verschiedene Arten als $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ schreiben. Aus (119), (40) folgt

$$Z \geqq c_{11} \log^2 z \prod_{\mathfrak{p}|\zeta} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right) \qquad (z > 4). \tag{120}$$

Wegen

$$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1} = O\left(\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)\right)$$

folgt aus (116), (120), (111), (115), (108), Hilfssatz 12

$$S^* = O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\log^2 |\mathfrak{N}\zeta|} \prod_{\mathfrak{p}|\zeta} \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)\right)$$

für

$$|\mathfrak{N}\zeta| \geqq c_{12}. \tag{121}$$

Wegen (109) werden in S^* sicherlich alle diejenigen ganzen Zahlen η aus K mit $|\eta| < c_8 |\zeta|$, $|\zeta - \eta| < c_8 |\zeta|$ mitgezählt, für die gleichzeitig $\langle\eta\rangle$ prim, $|\mathfrak{N}\eta| > z$,

$\langle\zeta-\eta\rangle$ prim, $|\mathfrak{N}(\zeta-\eta)|>z$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} N(\zeta) &\doteq N(\eta;\ \langle\eta\rangle \text{ prim},\ \langle\zeta-\eta\rangle \text{ prim},\ |\eta|<c_8|\zeta|,\ |\zeta-\eta|<c_8|\zeta|) \\ &\leqq N(\eta;\ \min(|\mathfrak{N}\eta|,\ |\mathfrak{N}(\zeta-\eta)|)\leqq z,\ |\eta|<c_8|\zeta|,\ |\zeta-\eta|<c_8|\zeta|)+S^* \qquad (122)\\ &\leqq 2N(\eta;\ |\eta|<c_8|\zeta|,\ |\mathfrak{N}\eta|\leqq z)+S^*, \end{aligned}$$

woraus mit Hilfe des Kunstgriffes von (106) und Hilfssatz 11 unter Voraussetzung von (121) sofort Satz 16 folgt. Für $1<|\mathfrak{N}\zeta|<c_{12}$ ist wegen Hilfssatz 10 sicherlich $N(\zeta)=O(1)$ und daher Satz 16 trivialerweise richtig. Damit ist Satz 16 bewiesen.

Satz 16 wurde erstmals von Tatuzawa [8]) durch Ausbau der Methode von Brun und Rademacher bewiesen, jedoch nur unter der Einschränkung, daß ξ und η zulässige Zahlen sind.

Satz 17. *Für jede zulässige Zahl ζ aus* K *und jede ganze Zahl γ aus* K *gibt es eine nur von* K *abhängige positive Konstante c_{13} mit*

$$N(\xi;\ \langle\xi\rangle \textit{ prim},\ \langle\xi+\gamma\rangle \textit{ prim},\ |\xi|<|\zeta|)<c_{13}\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\log^2|\mathfrak{N}\zeta|}\prod_{\mathfrak{p}|\gamma}\left(1+\frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. In Satz 15 wählen wir für $\xi_1,\ldots,\xi_M$ die Menge aller ganzen Zahlen $\xi(\xi+\gamma)$ mit $|\xi|<|\zeta|$. Dann wird

$$\begin{aligned} M &= N(\xi;\ |\xi|<|\zeta|), \\ S &= N(\xi;\ |\xi|<|\zeta|,\ \mathfrak{p}\nmid\xi(\xi+\gamma) \text{ für } \mathfrak{N}\mathfrak{p}\leqq z), && (123)\\ S &= N(\xi;\ |\xi|<|\zeta|,\ \mathfrak{d}\mid\xi(\xi+\gamma)), && (124)\\ z &\doteq |\mathfrak{N}\zeta|^{\frac{1}{3n}}. \end{aligned}$$

$\omega(\mathfrak{d})$ sei definiert als die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$\xi(\xi+\gamma)\equiv 0 \bmod \mathfrak{d};$$

$\omega(\mathfrak{d})$ ist multiplikativ und

$$\omega(\mathfrak{p})=\begin{cases}2 & \text{für } \mathfrak{p}\nmid\gamma,\\ 1 & \text{für } \mathfrak{p}\mid\gamma.\end{cases}$$

Wegen (124) und Hilfssatz 10 wird

$$t=c_4\,|\mathfrak{N}\zeta|.$$

Der von (113) bis (121) reichende Teil des Beweises von Satz 16 kann jetzt wörtlich übertragen werden, wenn man nur in (118) und daher auch in (120) ζ durch γ ersetzt. Für S^* aus (123) ergibt sich deshalb

$$S^*=O\left(\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\log^2|\mathfrak{N}\zeta|}\prod_{\mathfrak{p}|\gamma}\left(1+\frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)\right)\qquad (|\mathfrak{N}\zeta|\geqq c_{14}).$$

Bei S^* werden sicherlich alle diejenigen ganzen Zahlen ξ aus K mit $|\xi|<|\zeta|$ gezählt, für die gleichzeitig $\langle\xi\rangle$ prim, $\langle\xi+\gamma\rangle$ prim, $|\mathfrak{N}\xi|>z$, $|\mathfrak{N}(\xi+\gamma)|>z$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} N(\zeta) &\doteq N(\xi;\ \langle\xi\rangle \text{ prim},\ \langle\xi+\gamma\rangle \text{ prim},\ |\xi|<|\zeta|) \\ &\leqq N(\xi;\ \min(|\mathfrak{N}\xi|,\ |\mathfrak{N}(\xi+\gamma)|)\leqq z,\ |\xi|<|\zeta|)+S^* \\ &\leqq N(\xi;\ |\mathfrak{N}\xi|\leqq z,\ |\xi|<|\zeta|)+N(\xi;\ |\mathfrak{N}(\xi+\gamma)|\leqq z,\ |\xi|<|\zeta|)+S^*. \end{aligned}$$

[8]) Vgl. [22], Satz 1.

Von hier aus läuft der Beweis wie der Beweis von Satz 16 (im Anschluß an (122)) unter Benutzung von Hilfssatz 11 zu Ende. Damit ist Satz 17 bewiesen.

Bekanntlich ist

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{m} = \log x + O(1) \qquad (x \to \infty), \tag{125}$$

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1) \qquad \left(x \to \infty, \; p \text{ prim}\right); \tag{126}$$

im Gegensatz dazu steht der berühmte Satz von Brun:

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p+2 \text{ prim}}} \frac{1}{p} = O(1) \qquad \left(x \to \infty, \; p \text{ prim}\right). \tag{127}$$

Die Aussagen (125) und (126) lassen sich leicht auf ganze Zahlen von K übertragen (Satz 18, Satz 19); (127) läßt sich mit Hilfe von Satz 17 verallgemeinern (Satz 20). Der Einfachheit halber wählen wir dabei speziell für die oben verwendete zulässige Zahl ζ die natürliche Zahl x; für eine ganze Zahl α aus K sei $\tilde{\alpha} \doteq \max |\alpha^{(j)}|$.

Satz 18. *Es ist*

$$\sum_{|\alpha| < x} \frac{1}{(\tilde{\alpha})^n} = n c_4 \log x + O(1) \qquad (x \to \infty).$$

Beweis. Wir denken uns die (wegen Hilfssatz 10 endlich vielen) ganzen Zahlen α mit $|\alpha| < 1$ irgendwie numeriert, und wir setzen die Numerierung auf $|\alpha| < 2$, $|\alpha| < 3, \ldots$ fort. Jeder natürlichen Zahl m ist in eindeutiger Weise eine natürliche Zahl $x = x(m)$ zugeordnet mit

$$x \leqq \tilde{\alpha}_m < x + 1, \tag{128}$$

$$H(x) \doteq \sum_{|\alpha| < x} 1 \leqq m \leqq H(x+1); \tag{129}$$

Wegen (129), Hilfssatz 10, (128) ist

$$c_4 (\tilde{\alpha}_m)^n = m + O\left(m^{1-\frac{1}{n}}\right). \tag{130}$$

Nun ist

$$\sum_{|\alpha| < x} \frac{1}{(\tilde{\alpha})^n} = \sum_{m \leqq H(x)} \frac{1}{(\tilde{\alpha}_m)^n}. \tag{131}$$

Aus (131), (130), Hilfssatz 10, (125) folgt die Behauptung.

Satz 19. *Es existiert eine positive Konstante c_{15} mit*

$$\sum_{\substack{|\alpha| < x \\ \langle\alpha\rangle \text{ prim}}} \frac{1}{(\tilde{\alpha})^n} < c_{15} \log\log x \qquad (x \geqq 3).$$

Beweis. Eine ganze Zahl α aus K heiße eine Primzahl, wenn $\langle\alpha\rangle$ ein Primideal von K ist. Wir denken uns jetzt die Primzahlen α mit $|\alpha| < 1$ irgendwie numeriert, und wir setzen die Numerierung der Primzahlen α aus K auf $|\alpha| < 2$, $|\alpha| < 3, \ldots$ fort. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Summe in Satz 19 nicht abbricht, da sonst der Satz trivialerweise richtig ist. Jeder natürlichen Zahl m ist dann in eindeutiger Weise eine natürliche Zahl $x = x(m)$ zugeordnet mit

$$x \leqq \tilde{\alpha}_m < x + 1, \tag{132}$$

$$N(x) \doteq N(\alpha;\ |\alpha| < x,\ \langle\alpha\rangle \text{ prim}) \leqq m \leqq N(x+1). \tag{133}$$

Wegen (133), Satz 15, (132) ist

$$m = O\left(\frac{(\tilde{\alpha}_m)^n}{\log \tilde{\alpha}_m}\right)$$

und daher

$$m \log m = O((\tilde{\alpha}_m)^n). \tag{134}$$

Nun ist

$$\sum_{\substack{|\alpha| < x \\ \langle\alpha\rangle \text{ prim}}} \frac{1}{(\tilde{\alpha})^n} = \sum_{m \leqq N(x)} \frac{1}{(\tilde{\alpha}_m)^n}. \tag{135}$$

Aus (135), (134), Satz 15 folgt die Behauptung.

Eine nichttriviale untere Abschätzung der Summe in Satz 19 erfordert etwas mehr Aufwand.

Satz 20. *Es existiert eine nur von* K *und* γ *abhängige positive Konstante* $c_1(\gamma)$ *mit*

$$\sum_{\substack{|\alpha| < x \\ \langle\alpha\rangle \text{ prim}, \langle\alpha+\gamma\rangle \text{ prim}}} \frac{1}{(\tilde{\alpha})^n} < c_1(\gamma).$$

Beweis. Es sei γ eine fest vorgegebene ganze Zahl aus K; wir nennen die ganze Zahl α aus K einen Primzahlzwilling, wenn $\langle\alpha\rangle$ und $\langle\alpha+\gamma\rangle$ prim sind. Wir numerieren jetzt die Primzahlzwillinge α wie die Primzahlen im vorigen Beweis. Der vorige Beweis überträgt sich wörtlich; die Anwendung von Satz 17 an Stelle von Satz 15 liefert

$$m \log^2 m < c_2(\gamma)\,(\tilde{\alpha}_m)^n$$

an Stelle von (134), woraus sich die Behauptung wie im vorigen Beweis ergibt.

Aus (103) folgt unmittelbar

Satz 21. *Es sei* ζ *eine beliebige zulässige Zahl aus* K, $\mathfrak{f}$ *ein beliebiges ganzes Ideal aus* K *und* γ *eine beliebige ganze Zahl aus* K *mit* $(\gamma, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$; *ferner seien* a, b, z *reelle Zahlen; ist dann*

$$a > 1, \quad 0 < b < \frac{a}{2n},$$

$$2 \leqq z \leqq \mathfrak{N}\mathfrak{f}^b, \quad |\mathfrak{N}\zeta| \geqq \mathfrak{N}\mathfrak{f}^a,$$

so gibt es eine nur von K, a, b *abhängige Konstante* $c(a, b)$ *mit*

$$N(\xi;\ \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f},\ |\xi| < |\zeta|,\ \mathfrak{p} \nmid \xi \text{ für } \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z) < c(a, b)\,\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\log z}.$$

Aus (103) folgt außerdem

Satz 22. *Es sei* ζ *eine beliebige zulässige Zahl aus* K *und* a, z *reelle Zahlen; ist dann*

$$z \geqq 2, \quad a > 2n, \quad |\mathfrak{N}\zeta| \geqq z^a,$$

so gibt es eine nur von K *und* a *abhängige Konstante* $c(a)$ *mit*

$$N(\xi;\ |\xi| < |\zeta|,\ \mathfrak{p} \nmid \xi \text{ für } \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq z) < c(a)\,\frac{|\mathfrak{N}\zeta|}{\log z}.$$

Zu einer Verallgemeinerung der Sätze 15, 16, 17 gelangt man, wenn man nach Vorgabe der natürlichen Zahl s die s Paare ganzer Zahlen α_k, β_k aus K mit $(\alpha_k, \beta_k) = \mathfrak{o}$, $\alpha_k\beta_j - \alpha_j\beta_k \neq 0$ $(j \neq k)$ betrachtet und für $\xi_1, \ldots, \xi_M$ in Satz 14 die Zahlen $\xi = (\alpha_1\eta + \beta_1)\cdots(\alpha_s\eta + \beta_s)$, $|\eta| < |\zeta|$ wählt. Wie man bei Satz 15 von

einem einfachen und bei Satz 16 und Satz 17 von einem zweifachen Sieb spricht, so liegt jetzt ein s-faches Sieb vor. Modifiziert man Hilfssatz 10 oder Hilfssatz 12 in naheliegender Weise, so kann man durch Ausgestaltung des Beweisgedankens von Satz 16 die s-fache Aussiebung vornehmen und gelangt zu einem Satz, der im Falle des Körpers P der rationalen Zahlen in dieser Allgemeinheit wohl erstmals von Prachar [9]) bewiesen wurde.

In den obigen Sätzen treten Bedingungen der Gestalt $|\xi| < |\zeta|$ auf. Die Tatsache, daß ζ eine Zahl von K ist, wird jedoch an keiner Stelle benutzt. Man kann daher die zulässige Zahl ζ aus K in diesen Bedingungen durch einen zulässigen Vektor $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ersetzen; dabei heiße ein Vektor $\{a_1, \ldots, a_n\}$ zulässig, wenn $a_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $a_{r_1+r+j} = a_{r_1+j}$ $(j = 1, \ldots, r_2)$ und $a_j^n < c_1 a_1 \cdots a_n$ $(j = 1, \ldots, n)$ ist. Die n Konjugierten einer zulässigen Zahl ζ geben also in bequemer Weise zu einem zulässigen Vektor Anlaß.

Es ist nicht schwer, die obigen Sätze noch dahingehend zu verallgemeinern, daß man die Auszählung der ganzen Zahlen ξ nach allgemeineren geometrischen Figuren (konvexen Körpern oder Sternkörpern etwa) an Stelle der durch zulässige Zahlen ζ und zulässige Vektoren ζ erzeugten Figuren $|\xi| < |\zeta|$ vornimmt.

Literaturverzeichnis.

[19] *H. Hasse*, Zahlentheorie. Berlin 1949.

[20] *H. Rademacher*, Über die Anwendung der Viggo Brunschen Siebmethode auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Sitz.-Ber. Berliner Akad. Wiss. **1923**, 211—218.

[21] *G. J. Rieger*, Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. I, II. J. reine angew. Math. **199** (1958), 208—214 und **201** (1959), 157—171.

[22] *T. Tatuzawa*, Additive prime number theory in an algebraic number field. J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 409—423.

[9]) Vgl. [3], 2. Satz 4. 2.

Eingegangen 8. November 1960.

Umschreibende Würfel von konvexen Körpern in euklidischen Räumen[1]).

Marston Morse gewidmet.

Von *S. S. Cairns* in Urbana (Ill.).

1. Räume von Schachteln und Würfeln im R^n.

Im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n sei $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ ein orthonormales Vektorensystem. In bezug auf ζ drücken wir einen Punkt von R^n in der Form $z = \sum_{i=1}^{n} z_i \zeta_i$ aus. Wir nennen das Koordinatensystem $(z) = (z_1, \ldots, z_n)$ *mit ζ verbunden.*

Eine *ζ-Schachtel* K_ζ im R^n ist eine Punktmenge von der Form

$$K_\zeta : a_i \leqq z_i \leqq a_i + c_i \quad (c_i \geqq 0) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Die *Eckpunkte* von K_ζ sind die 2^n nicht notwendig verschiedenen Punkte mit den (z)-Koordinaten $(a_1 + \varepsilon_1 c_1, \ldots, a_n + \varepsilon_n c_n)$, wo $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ die Werte 0 und 1 unabhängig voneinander annehmen. Die *Kantenlängen* von K_ζ sind $(c_1, \ldots, c_n)$. Im Falle $c_1 = \cdots = c_n$ heißt K_ζ auch ein *ζ-Würfel.* Offenbar ist die Dimension Dim K_ζ gleich der Anzahl der Kantenlängen, die positiv sind. Ein ζ-Würfel hat die Dimension 0 oder n.

Eine *Schachtel* [ein *Würfel*] im R^n ist eine Punktmenge K, für die ein System ζ existiert, so daß K eine ζ-Schachtel [ein ζ-Würfel] ist.

1. 1 *Eine ζ-Schachtel K_ζ ist auch eine ζ'-Schachtel für jedes System ζ' der Form*

$$\zeta' = (e_1 \zeta_{i_1}, \ldots, e_n \zeta_{i_n}), \tag{1.2}$$

wobei $e_j = +1$ oder -1 $(j = 1, \ldots, n)$ und $(i_1, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ bezeichnet.

Das folgende einfache Resultat ist eine Verallgemeinerung von **1. 1**.

1. 2 *Bezeichnen wir mit $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k})$ die positiven Kantenlängen* von K_ζ, $k =$ Dim K_ζ $(0 \leqq k \leqq n)$, *so ist K nicht nur eine ζ-Schachtel, sondern auch eine ζ'-Schachtel, $\zeta' = (\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$, dann und nur dann, wenn eine Teilfolge $(\zeta'_{j_1}, \ldots, \zeta'_{j_k})$ des Systems ζ' mit der Eigenschaft*

$$\zeta'_{j_h} = e_h \zeta_{i_h}, \quad e_h = +1 \text{ oder } -1, \qquad (h = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

existiert. Im Falle $k = 0$ ist diese Bedingung für jedes ζ' trivialerweise erfüllt.

---

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit wurden in der „Research Announcements" Abteilung des *Bulletin of the American Mathematical Society* veröffentlicht. (Circumscribed cubes in euclidean n-space, **65** (1959), 327—8.) Die Arbeit wurde am Institute for Advanced Study (Princeton, New Jersey) mit Unterstützung der National Science Foundation (Grant G-8153) und des Office of Naval Research (Grant 2989(00)) der USA vollendet. Über sie wurde im Juli 1960 ein Vortrag an der Universität Bonn gehalten.

Es ist leicht zu bestätigen, daß die Kantenlängen und die Eckpunkte einer Schachtel K invariant sind; das heißt, wenn K als ζ-Schachtel dargestellt wird, sind die Kantenlängen und die Eckpunkte (aber nicht ihre Koordinaten) unabhängig von ζ.

Der *Raum* $\boldsymbol{K}^*$ *der Schachteln* im R^n wird folgenderweise definiert. Seine Elemente sind die Schachteln. K sei eine Schachtel und U_i $(i = 1, \ldots, 2^n)$ seien irgendwelche Umgebungen ihrer Eckpunkte. Dann besteht eine *Umgebung* $U(K)$ von K in $\boldsymbol{K}^*$ aus allen Schachteln K' mit folgender Eigenschaft: $K' \in U(K)$ dann und nur dann, wenn jedes U_i wenigstens einen Eckpunkt von K' enthält. Der *Raum* $\boldsymbol{W}^*$ *der Würfel* im R^n ist der Unterraum von $\boldsymbol{K}^*$, der aus den Würfeln im R^n besteht.

2. Räume von umschreibenden Schachteln und Würfeln.

2. 1 Von hier ab werden wir mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein festes orthonormales Vektorensystem im R^n bezeichnen, und wir werden R^n als Modul mit der Basis ξ und dem entsprechenden Koordinatensystem (x) betrachten. Im allgemeinen werden wir orthonormale Vektorensysteme und ihre verbundenen Koordinatensysteme im R^n mit η und (y), ζ und (z) usw. bezeichnen.

Gegeben sei eine beschränkte Punktmenge $A < R^n$. Eine ζ-Schachtel K_ζ (siehe (1. 2)) heißt die *umschreibende* ζ*-Schachtel* (*von* A), wenn

$$(2.\,1) \qquad a_i = \min\{z_i \mid z \in \bar{A}\}, \quad a_i + c_i = \max\{z_i \mid z \in \bar{A}\} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

gilt. Aus $K_\zeta = K_\eta$ (siehe **1. 2**) folgt leicht, daß K_η dann und nur dann die umschreibende η-Schachtel ist, wenn (2. 1) gilt. Daher können wir K als eine *umschreibende Schachtel* (*von* A) definieren, wenn K gleich irgendeiner umschreibenden ζ-Schachtel von A ist.

2. 2 Für gegebenes A bezeichnen wir mit $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(A) < \boldsymbol{K}^*$ den *Raum der umschreibenden Schachteln* (*von* A); das heißt, den Unterraum von $\boldsymbol{K}^*$, der aus allen umschreibenden Schachteln von A besteht. Der *Raum der umschreibenden Würfel* ist der Unterraum $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(A) < \boldsymbol{K}$, der aus den Würfeln $W \in \boldsymbol{K}$ besteht.

2. 3 *Jede umschreibende Schachtel von A ist auch eine umschreibende Schachtel der konvexen Hülle von A und umgekehrt.* Hiernach nehmen wir an, daß A kompakt und konvex ist. Bei Untersuchungen der Räume von umschreibenden Würfeln hat diese Voraussetzung keine Beschränkung der Allgemeinheit zur Folge.

Im Jahre 1942 hat Kakutani[2]) eine Frage von Rademacher beantwortet, indem er die Existenz eines umschreibenden Würfels im Falle $n = 3$ bewiesen hat. Diesen Existenzsatz haben Yamabe und Yujobô[3]) auf den n-dimensionalen Fall verallgemeinert. Mit anderen Worten: Yamabe und Yujobô haben bewiesen, daß der Raum $\boldsymbol{W}(A)$ nie leer ist.

2. 4 Im trivialen Fall, wenn A aus einem einzigen Punkt besteht, besteht $\boldsymbol{W}(A)$ aus einem einzigen 0-dimensionalen Element. Hiernach nehmen wir an, daß A wenigstens zwei Punkte enthält und daher auch die sie verbindende Strecke.

---

[2]) *S. Kakutani*, A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in R^3, Annals of Mathematics, **43** (1942).

[3]) *H. Yamabe* und *Z. Yujobo*, On the continuous function defined on a sphere, Osaka Mathematical Journal, **2** (1950).

2. 5 Satz I. *Für jede Menge A gilt folgende Abschätzung der Dimension des Raumes $\boldsymbol{W}$ ihrer umschreibenden Würfel:*

$$\text{(2. 2)} \qquad \operatorname{Dim} SO(n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \leqq \operatorname{Dim} \boldsymbol{W} \leqq \operatorname{Dim} SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. 6 Vermutung. *Für jede Menge A enthält $\boldsymbol{W}$ einen Unterraum der homöomorph zu $SO(n-1)$ ist.*

3. Die Funktionen c_i.

Der Rest dieser Arbeit befaßt sich hauptsächlich mit dem Beweis von Satz I. Der letzte Abschnitt behandelt die Vermutung im Falle $n = 3$.

3. 1 Zu jedem System ζ (siehe **2. 1**) gibt es eine einzige umschreibende ζ-Schachtel $K_\zeta(A)$, und jede umschreibende Schachtel K ist gleich der umschreibenden ζ-Schachtel $K_\zeta(A)$ für jedes ζ einer ganzen Klasse von Systemen (**1. 1** und **1. 2**).

Wir werden $SO(n)$ als Rotationsgruppe des R^n und $\varrho \in SO(n)$ als einen Operator auf Vektorensystemen ζ betrachten. Zum Beispiel bezeichne $\varrho\xi$ das System, das man aus der Basis ξ durch eine Rotation ϱ erhält. Durch die Gleichung

$$\text{(3. 1)} \qquad \varkappa(\varrho) = K_{\varrho\xi}(A) \qquad \text{(siehe 3. 1)}$$

definieren wir eine stetige Abbildung

$$\text{(3. 2)} \qquad \varkappa : SO(n) \to \boldsymbol{K}.$$

3. 2 Lemma. *Jede n-dimensionale umschreibende Schachtel $K \in \boldsymbol{K}$ hat genau $\nu = 2^{n-1} n!$ Urbilder $\varkappa^{-1}(K)$.*

Beweis: η sei ein System mit $K = K_\eta(A)$. Von den $2^n n!$ Systemen $(e_1 \eta_{i_1}, \ldots, e_n \eta_{i_n})$ [Bezeichnung wie in (1. 2)] sind genau die Hälfte Rotationen von ξ. Das Lemma folgt leicht aus **1. 1** und **1. 2**. Auch könnte man leicht eine Verallgemeinerung des jetzigen Lemmas für k-dimensionale Schachteln ($k < n$) ableiten, wir brauchen aber keine solche Verallgemeinerung.

3. 3 Korollar. *Für jedes A mit $1 \leqq \operatorname{Dim} A \leqq n$ hat jeder umschreibende Würfel $W \in \boldsymbol{W}$ genau ν Urbilder $\varkappa^{-1}(W)$.*

Dieses Korollar folgt aus **3. 2** und der Tatsache, daß ein umschreibender Würfel einer k-dimensionalen Menge A ($k > 0$) n-dimensional ist.

3. 4 Satz II. *Mit*

$$\text{(3. 3)} \qquad \Omega(n) = (\omega_1, \ldots, \omega_\nu)$$

bezeichnen wir die Untergruppe von $SO(n)$, die aus allen Rotationen mit folgender Eigenschaft besteht:

$$\text{(3. 4)} \qquad \omega\zeta = (e_1 \zeta_{i_1}, \ldots, e_n \zeta_{i_n}) \qquad \textit{(Bezeichnung wie oben).}$$

Mit $\boldsymbol{S}$ bezeichnen wir den Gruppenraum

$$\text{(3. 5)} \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(n) = SO(n)/\Omega(n)$$

und mit

$$\text{(3. 6)} \qquad \bar{\varkappa} : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{K}$$

die Abbildung von $\boldsymbol{S}$ in $\boldsymbol{K}$, die durch $\varkappa$ induziert wird. Wenn A n-dimensional ist, dann ist $\bar{\varkappa}$ ein Homöomorphismus.

Dieser Satz und das folgende Korollar sind leicht zu beweisen mit Hilfe von **3. 2** und **3. 3**.

3. 5 Korollar. *$W' < S$ bezeichne das Urbild $\bar{\varkappa}^{-1}(W)$. Dann ist $\bar{\varkappa}' = \varkappa \mid W'$ ein Homöomorphismus $\bar{\varkappa}' : W' \to W$, selbst im Falle Dim $A < n$.*

Wir werden die Kantenlängen $(c_1, \ldots, c_n)$ von $K_{\varrho\xi}(A) = \varkappa(\varrho)$ (siehe (3. 1)) als Funktionen auf $SO(n)$ betrachten. Sie werden durch folgende definierende Ungleichungen von $K_{\varrho\xi}$ bestimmt:

$$\varkappa(\varrho) = K_{\varrho\xi}(A) : a_i(\varrho) \leqq z_i \leqq a_i(\varrho) + c_i(\varrho) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3. 7}$$

wo (z) das mit $\zeta = \varrho\xi$ verbundene Koordinatensystem bezeichnet. Die Funktionen $(c_1, \ldots, c_n)$ sind eng miteinander verknüpft, wie folgendes einfache Resultat zeigt.

3. 6 *$\sigma_{ji} \in SO(n)$ sei irgendeine Rotation, die den Vektor ξ_i in den Vektor ξ_j bringt. Dann gelten die Identitäten*

$$c_j(\varrho) = c_i(\sigma_{ji}\varrho) \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \quad \varrho \in SO(n). \tag{3. 8}$$

4. Der Raum V. Zwei Spezialfälle.

Nach den Definitionen ist $\varkappa(\varrho) = K_{\varrho\xi}(A)$ dann und nur dann ein Würfel, wenn $c_1(\varrho) = \cdots = c_n(\varrho)$ ist. Symbolisch ausgedrückt:

$$\varkappa(\varrho) \in W \longleftrightarrow c_1(\varrho) = \cdots = c_n(\varrho). \tag{4. 1}$$

4. 1 $V < SO(n)$ bezeichne folgenden Unterraum von $SO(n)$:

$$V = V(A) = \{\varrho \in SO(n) \mid c_1(\varrho) = \cdots = c_n(\varrho)\}. \tag{4. 2}$$

Aus $\varrho \in V$ folgt $\omega\varrho \in V$ für jedes $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_\nu) = \Omega$ (siehe **3. 4**). Daher entsteht der Raum $W' \approx W$ ($\approx$ bedeutet *homöomorph zu*, siehe **3. 5**) aus V durch Identifizierung der ν Punkte $\omega\varrho$ für jedes $\varrho \in V$. Weil Ω nur endlich viele Elemente enthält, gilt die Beziehung

$$\text{Dim } V = \text{Dim } W' = \text{Dim } W. \tag{4. 3}$$

Jetzt bilden wir $SO(n)$ in den R^n folgendermaßen ab:

$$f : SO(n) \to R^n \text{ wo } f(\varrho) = (c_1(\varrho), \ldots, c_n(\varrho)), \tag{4. 4}$$

wo $(c_1(\varrho), \ldots, c_n(\varrho))$ einen Punkt in bezug auf das System (x) bezeichnet.

4. 2 Lemma. *Der Raum V ist das Urbild der Diagonale*

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\} \quad (D < R^n), \tag{4. 5}$$

also

$$V = f^{-1}(D) \qquad (V \in SO(n)). \tag{4. 6}$$

Dieses Lemma folgt aus (4. 1) und (4. 4).

Das ganze Bild $fSO(n)$ liegt im Teilraume $\bar{R}^n_+ - (0)$ von R^n, wo $\bar{R}^n_+$ durch $x_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ definiert ist und (0) den Nullpunkt bezeichnet. Der Einheitspunkt der x_i-Achse sei mit p_i $(i = 1, \ldots, n)$ bezeichnet und $\pi : [\bar{R}^n_+ - (0)] \to s^{n-1}$ bezeichne die Zentralprojektion vom Nullpunkt aus auf das geschlossene $(n - 1)$-Simplex $s^{n-1} = p_1 p_2 \cdots p_n$. Anstatt f werden wir meistenteils die Abbildung

$$g = \pi f : SO(n) \to s^{n-1} \tag{4. 7}$$

gebrauchen. Sie kann auf folgende Weise beschrieben werden:

$$(4.8) \qquad g(\varrho) = (\gamma_1(\varrho), \ldots, \gamma_n(\varrho)), \qquad \gamma_i(\varrho) = \frac{c_i(\varrho)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(\varrho)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

4. 3 In (4. 8) können wir $(\gamma_1(\varrho), \ldots, \gamma_n(\varrho))$ entweder als die (x)-Koordinate von $g(\varrho)$ oder als seine baryzentrische Koordinate auf $s^{n-1} = p_1 p_2 \cdots p_n$ betrachten. Als Folge von **4. 2** gilt

$$(4.9) \qquad V = g^{-1}(q),$$

wo q das Baryzentrum von s^{n-1} bezeichnet.

Nach **1. 1** mit $\alpha = 0$ besitzen f und g folgende Symmetrieeigenschaft: Aus

$$(x_1, \ldots, x_n) \in fSO(n) \text{ bzw. } (x_1, \ldots, x_n) \in gSO(n)$$

folgt

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in fSO(n) \text{ bzw. } (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in gSO(n)$$

für jede Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ von $(1, \ldots, n)$. Allgemein sei $(u_1, \ldots, u_n)$ ein baryzentrisches Koordinatensystem auf einem Simplex s^{n-1}. Eine Punktmenge $\Sigma < s^{n-1}$ nennen wir *symmetrisch auf* s^{n-1}, wenn

$$(u_1, \ldots, u_n) \in \Sigma \rightarrow (u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \in \Sigma$$

für jede Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ von $(1, \ldots, n)$ gilt. Eine Abbildung $g: \Sigma' \rightarrow s^{n-1}$ nennen wir *symmetrisch* (*in bezug auf* s^{n-1}), wenn die Bildmenge $g\Sigma'$ symmetrisch auf s^{n-1} ist.

Die geometrische Bedeutung der Symmetrie in bezug auf s^{n-1} ist leicht einzusehen mit Hilfe der ersten baryzentrischen Unterteilung von s^{n-1}. Wir haben folgenden Satz gerade bewiesen:

4. 4 Satz III. *Der Raum V ist das Urbild des Baryzentrums eines $(n-1)$-Simplexes s^{n-1} bei einer symmetrischen Abbildung $g: SO(n) \rightarrow s^{n-1}$.*

Die Menge $fSO(n)$, und daher auch $gSO(n)$, erfüllt noch andere Bedingungen, die wir nicht gebrauchen werden. Man kann sie aus folgender Tatsache ableiten: Die Menge A schneidet jede $(n-1)$-dimensionale Randschachtel von jeder umschreibenden Schachtel.

Wir bemerken, daß $\operatorname{Dim} SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ und $\operatorname{Dim} s^{n-1} = n-1$ ist. Aus $gSO(n) < s^{n-1}$ folgt $\operatorname{Dim} gSO(n) \leqq n-1$. Durch g wird die Dimension daher um wenigstens $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ vermindert. Nach einem wohlbekannten Satz[4]) der Dimensionstheorie gibt es daher wenigstens einen Bildpunkt $r \in gSO(n)$, für den gilt

$$(4.10) \qquad \operatorname{Dim} g^{-1} r \geqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \operatorname{Dim} SO(n-1).$$

4. 5 Aus Symmetrie- und Homotopiebetrachtungen werden wir schließen, daß $r = q$ die Bedingung (4. 10) erfüllt.

Betrachten wir den Fall einer Strecke $A = a_0 a_1$. Die umschreibenden Schachteln sind genau die Schachteln mit $a_0 a_1$ als einer Hauptdiagonalen. Offenbar ist $K \in \boldsymbol{K}$ ein Würfel, d. h. $K \in \boldsymbol{W}$, dann und nur dann, wenn die Winkel zwischen $a_0 a_1$ und den Kanten von K alle gleich $\arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ sind. Daher entsteht der ganze Raum aus einem umschreiben-

[4]) *W. Hurewicz* and *H. Wallmann*, Dimension Theory, Princeton 1948, p. 91, Theorem VI 7.

den n-Würfel K^0 durch Rotation von K^0 in R^n um die Gerade $a_0 a_1$ als Achse. Daher gelten $W \approx SO(n-1)$ und $\operatorname{Dim} W = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. So wird die untere Grenze in (2. 2) realisiert. Um die obere Grenze zu realisieren, genügt es, $A = S^{n-1}$ zu setzen, wo S^{n-1} eine euklidische $(n-1)$-Sphäre ist.

4. 6 Es ist also unmöglich, die Abschätzung (2. 2) zu verbessern. Bei den eben erwähnten Spezialfällen haben wir folgende Bildmengen:

$$\text{(4. 11)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad A = a_0 a_1 \to gSO(n) = s^{n-1}, \\ &\text{(b)} \quad A = S^{n-1} \to gSO(n) = q. \end{aligned}$$

Den Fall $A = a_0 a_1$ kann man auch als den Fall $\operatorname{Dim} A = 1$ charakterisieren. Zwischen $\operatorname{Dim} A$ und $gSO(n)$ bestehen die folgenden einfach abzuleitenden Beziehungen:

4. 7 *Dann und nur dann, wenn $gSO(n)$ einen Eckpunkt p_j, $j \in (1, \ldots, n)$ von s^{n-1} enthält, ist A eine Strecke und $gSO(n) = s^{n-1}$. Dann und nur dann, wenn $gSO(n)$ ein k-dimensionales Simplex $p_{i_0} p_{i_1} \cdots p_{i_k} \subset s^{n-1}$ schneidet, ist $\operatorname{Dim} A \leqq k+1$.*

5. Elementare Rotationen.

Als Vorbereitung zum allgemeinen Fall betrachten wir den Fall $n = 2$. Wir parametrisieren den Rotationsraum $SO(2)$, der gleich S^1 ist, folgendermaßen mit einem Parameter t:

$$\text{(5. 1)} \qquad \zeta = \varrho(t) \cdot \eta \longleftrightarrow \begin{cases} \zeta_1 = \eta_1 \cos t + \eta_2 \sin t, \\ \zeta_2 = -\eta_1 \sin t + \eta_2 \cos t. \end{cases}$$

Geometrisch gesprochen ist $\varrho(t)$ die positive Rotation um den Winkel t. Diese Parametrisierung gestattet uns, (c_1, c_2) als Funktionen von t zu betrachten:

$$\text{(5. 2)} \qquad c_i(t) = c_i(\varrho(t)).$$

Folgende Identitäten gelten:

$$\text{(5. 3)} \qquad c_i(t) = c_i(t+\pi) \qquad c_2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = c_1(t) \qquad \text{(s. (3. 3))}.$$

5. 1 Satz IV. *Im Falle $n = 2$ ist $W(A)$ homöomorph entweder zu $SO(2) = S^1$ oder zu einer abgeschlossenen nicht leeren Untermenge einer Strecke. Jede solche Untermenge wie auch $SO(2)$ ist homöomorph zu einem Raum W von umschreibenden Würfeln.*

Dieser Satz folgt sofort aus folgendem Hilfssatz:

5. 2 Hilfssatz. *Im Falle $n = 2$ ist der Raum $V(A)$ (s. (4. 2)) ein nichtleerer Unterraum von $SO(2)$, der periodisch in t ist mit der Periode $\frac{\pi}{2}$. Zu jedem abgeschlossenen Unterraum V' mit Periode $\frac{\pi}{2}$ gibt es eine kompakte konvexe Menge $A \subset R^2$, für die $V' = V(A)$ ist.*

Beweis des Hilfssatzes: Nach **4. 4** ist $V(A)$ das Urbild des Mittelpunktes q einer Strecke $s^1 = p_1 p_2$ bei einer Abbildung $g: SO(2) \to s^1$, wo $gSO(2)$ symmetrisch in bezug auf q ist. Weil $SO(2)$ zusammenhängend ist und die Abbildung g symmetrisch und stetig ist, ist $q \in gSO(2)$. Daher ist $V(A)$ nicht leer.

Gegeben sei eine Menge V' des Hilfssatzes. Wir betrachten $SO(2) = S^1$ als den Einheitskreis ($x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$) im R^2 und können ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß V' den $t = 0$ entsprechenden Punkt (1, 0), und daher

auch den $t = \frac{\pi}{2}$ entsprechenden Punkt (0, 1) enthält. V_0' bezeichne den Durchschnitt von V' mit dem Bogen $S_0 : 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ auf S^1, und A sei eine konvexe Hülle der Menge $S^1 - (S_0 - V_0')$. Man bestätigt leicht, daß ein umschreibendes Rechteck $K(A)$ dann und nur dann ein Quadrat ist, wenn eine Kante von $K(A)$ tangential zu S^1 an einem Punkt von V_0' ist. Der Hilfssatz und Satz IV folgen nun sofort.

Für allgemeines n werden wir auch mit einer Parametrisierung des Raumes $SO(n)$ anfangen (s. § 6 unten). Danach werden wir Satz I aus Symmetrie- und Homotopieeigenschaften folgern. Die Homotopiegruppen des Raumes $SO(n)$ sind sicherlich nicht so einfach wie im Falle $n = 2$, aber wir werden $SO(n)$ im Beweise von Satz I durch eine Zelle, analog wie $SO(2)$ durch S_0, ersetzen können.

Als ersten Schritt für eine Parametrisierung von $SO(n)$ werden wir eine *kanonische Faktorisierung* (**6. 2** unten) einer beliebigen Rotation $\varrho : \xi \to \eta$ definieren. Die einzelnen Faktoren werden ebene Rotationen sein, wo eine *ebene Rotation* $\varrho_j^i(t)$ folgendermaßen durch ihre Wirkung auf die Elemente eines Systems η charakterisiert wird. 1) Jeder Vektor $\eta_h (h \neq i, j)$ bleibt fest. 2) Der Vektor η_i dreht sich um den Winkel t nach η_j. 3) Um die Orthogonalität zu bewahren, dreht sich η_j gleichzeitig um denselben Winkel t.

5. 3 Hilfssatz. *Gegeben sei ein Einheitsvektor η_1. Dann existiert eine Rotation von der Form*

$$\varrho_1 = \varrho_n^1(t_n^1)\, \varrho_{n-1}^1(t_{n-1}^1) \cdots \varrho_2^1(t_2^1) \tag{5. 4}$$

mit $\eta_1 = \varrho_1 \xi_1$.

Beweis: Eine Rotation ϱ_1 von der Form (5. 4) dreht ξ_1 in einen Vektor mit folgenden Komponenten, wie man leicht bestätigt:

$$\varrho_1 \xi_1 : \begin{cases} u_1 = \cos t_2^1 \cos t_3^1 \cdots \cos t_n^1 \\ u_h = \sin t_h^1 \cos t_{h+1}^1 \cos t_{h+2}^1 \cdots \cos t_h^1 & (h = 2, \ldots, n-1) \\ u_n = \sin t_n^1. \end{cases} \tag{5. 5}$$

Unser Hilfssatz folgt aus der Tatsache, daß die Gleichungen (5. 5) eine Parameterdarstellung einer $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre S^{n-1} sind.

Wir werden $(t^1) = (t_2^1, \ldots, t_n^1)$ als kartesisches Koordinatensystem in einem Parameterraum R^{n-1} betrachten. Die Gleichung (5. 4) definiert $\varrho_1 = \varrho_1(t^1) = \varrho_1(t_2^1, \ldots, t_n^1)$ als Funktion mit R^{n-1} als Argumentbereich.

5. 4 Wir nennen $\varrho_1(t^1)$ eine *elementare Rotation*, wenn

$$(t^1) \in B^{n-1} : \begin{cases} |t_2^1| \leqq \pi \\ |t_h^1| \leqq \frac{\pi}{2} & (h = 3, \ldots, n) \end{cases} \tag{5. 6}$$

ist (B^{n-1} ist eine Schachtel im R^{n-1}).

Der Beweis des folgenden Korollars bietet keine Schwierigkeiten.

5. 5 Korollar. $(u_1, \ldots, u_n)$ seien die Komponenten des gegebenen Einheitsvektors η_1. Dann gibt es, mit folgenden Ausnahmen, genau eine *elementare Rotation* $\varrho_1(t^1)$, die die Bedingungen von Satz III erfüllt: a) Im Falle $\eta_1 = e\xi_j$ ($e = +1$ oder -1; $j > 2$) gilt $\eta_1 = \varrho_1(t^1)\, \xi_1$, $(t^1) \in B^{n-1}$ dann und nur dann, wenn $(t^1) = \left(t_2^1, \ldots, t_{j-1}^1, \frac{e\pi}{2}, 0, \ldots, 0\right)$ ist. Hier sind $(t_2^1, \ldots, t_{j-1}^1)$ willkürliche Werte, die (5. 6) erfüllen. b) Im Falle

$(|u_i| < 1, u_2 = 0, u_1 < 0)$ gibt es genau zwei elementare Rotationen $\varrho_1(t^1) = \varrho_1(\pm\pi, t_3^1, \ldots, t_n^1)$, für die **5. 3** gilt. Hier sind $(t_3^1, \ldots, t_n^1)$ durch η_1 bestimmt, mit $|t_h^1| < \frac{\pi}{2}$ $(h = 3, \ldots, n)$.

5. 6 Die Gleichungen (5. 5) definieren eine stetige Abbildung $\sigma_1 : B^{n-1} \to S^{n-1}$. Nach **5. 5** ist σ_1 eineindeutig auf dem Inneren von B^{n-1} $\Big($d. h. auf der Menge $|t_2^1| < \pi, |t_h^1| < \frac{\pi}{2}, h = 3, \ldots, n\Big)$, aber nicht auf den Randpunkten von B^{n-1}.

5. 7 Im allgemeinen werden wir

$$\varrho_h = \varrho_n^h(t_n^h)\, \varrho_{n-1}^h(t_{n-1}^h) \cdots \varrho_{h+1}^h(t_{h+1}^h) \qquad (h = 1, \ldots, n-1) \tag{5. 7}$$

eine *elementare Rotation* nennen, wenn

$$(t^h) = (t_{h+1}^h, \ldots, t_n^h) \in B^{n-h} : \begin{cases} |t_{h+1}^h| \leqq \pi \\ |t_j^h| \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (j = h+2, \ldots, n) \tag{5. 8}$$

ist. Hier bezeichnet B^{n-h} eine Schachtel in einem Parameterraum R^{n-h}.

6. Kanonische Faktorisierung einer Rotation.

6. 1 Satz V. *Jede Rotation $\varrho : \xi \to \eta$ läßt sich als Produkt*

$$\varrho = \varrho_{n-1}\varrho_{n-2} \cdots \varrho_1 \tag{6. 1}$$

von elementaren Rotationen (s. 5. 7) darstellen. Hier haben die Parameter

$$(t) = (t_1, \ldots, t_N) = (t_2^1, \ldots, t_n^1; \ldots; t_{h+1}^h, \ldots, t_n^h, \ldots; t_n^{n-1}), \quad N = \frac{n(n-1)}{2} \tag{6. 2}$$

als Bereich eine Schachtel

$$B^N = B^{n-1} \times B^{n-2} \times \cdots \times B^1 \qquad \textit{(cartesisches Produkt)} \tag{6. 3}$$

in einem Parameterraum $R^N = R^{n-1} \times R^{n-2} \times \cdots \times R^1$, wo B^{n-h} und R^{n-h} wie in **5. 7** *definiert sind.*

Beweis: Dieser Satz folgt leicht aus einer wiederholten Anwendung von **5. 3** und **5. 5**. Durch eine elementare Rotation ϱ_1 bringen wir ξ_1 in η_1. Dann halten wir η_1 fest, während wir durch eine elementare Rotation ϱ_2 den Vektor $\varrho_1\xi_2$ in $\eta_2 = \varrho_2\varrho_1\xi_2$ bringen, usw. In der $(h-1)$-ten Stufe dieses Verfahrens ist ein Produkt $\varrho_{h-1}^* = \varrho_{h-1}\varrho_{h-2} \cdots \varrho_1$ von $h-1$ elementaren Rotationen vorhanden, wo

$$\varrho_{h-1}^* \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_{h-1}, \xi_h^{h-1}, \ldots, \xi_n^{h-1}) \tag{6. 4}$$

ist. Der nächste Faktor ist eine elementare Rotation $\varrho_h : \xi_h^{h-1} \to \eta_h$ (s **5. 7**), die $(\eta_1, \ldots, \eta_{h-1})$ festhält. Mit dem $(n-1)$-ten Schritt erreichen wir die Formel (6. 1).

6. 2 Wir nennen die rechte Seite von (6. 1) eine *kanonische Faktorisierung* von ϱ.

6. 3 Die Gleichungen (6. 1) und (5. 7) definieren eine stetige Abbildung $\sigma : B^N \to SO(n)$, wo $\sigma(t) = \varrho_1(t)$ ist. Nach **5. 6** ist σ eineindeutig auf dem Inneren von B^N, aber nicht auf den Randpunkten von B^N.

Für unsere jetzigen Zwecke ist es unnötig, das Verhalten von σ auf dem Rande von B^N (mit Hilfe von **5. 5**) festzustellen.

7. Beweis des Satzes I.

7. 1 Hilfssatz. *Die Bildmenge $gSO(n) = g\sigma B^N$ enthält das Baryzentrum q von s^{n-1}.*

Beweis: Nach **4. 1** und **4. 3** ist dieser Hilfssatz zum folgenden Resultat äquivalent. Der Raum $\boldsymbol{V}$, und daher auch der Raum $\boldsymbol{W}$, ist nicht leer. So können wir **7. 1** aus dem Existenzsatz von Yamabe und Yujobô folgern. Auf folgende Weise kann man den Hilfssatz mehr im Geist dieser Arbeit beweisen. Die Abbildung $g\sigma : B^N \to s^{n-1}$ definiert auf s^{n-1} eine singuläre N-Zelle, die als Punktmenge mit $gSO(n)$ übereinstimmt und die daher symmetrisch in bezug auf s^{n-1} ist. Aus Homotopiebetrachtungen folgt, daß eine singuläre symmetrische Zelle auf s^{n-1} das Baryzentrum q enthalten muß. Wir lassen die Einzelheiten weg.

7. 2 Satz VI. *Im Inneren von B^N gibt es eine Schachtel C^N mit der Eigenschaft*

$$\boldsymbol{K} = \{\varkappa(\varrho) \mid \varrho \in \sigma C^N\}. \tag{7. 1}$$

Beweis: Nach Definition ist $K = \{\varkappa(\varrho) \mid \varrho \in \sigma B^N = SO(n)\}$. Der Satz bedeutet, daß man B^N durch eine kleinere Schachtel C^N ersetzen kann, wo C^N aus inneren Punkten von B^N besteht, und doch den ganzen Raum $\boldsymbol{K}$ von umschreibenden Schachteln gemäß (7. 1) erhält. Für eine gegebene Schachtel $K \in \boldsymbol{K}$ sei $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ ein System, für das $K = K_\zeta$ gilt. Mit $\varepsilon_1 = +1$ oder -1 und $j_1 \in (1, \ldots, n)$ bezeichnen wir zwei solche Werte, daß

$$\alpha(\xi_1, \varepsilon_1 \zeta_{j_1}) = \min \{\alpha(\xi_1, \varepsilon\zeta_j) \mid \varepsilon = +1, -1;\ j = 1, \ldots, n\} \tag{7. 2}$$

ist, wo α die Winkelfunktion mit $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ bezeichnet. Dann bestätigt man leicht, daß folgendes gilt:

$$\cos \alpha(\xi_1, \varepsilon_1 \zeta_{j_1}) \geqq \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7. 3}$$

Wir setzen $\eta_1 = \varepsilon_1 \zeta_{j_1}$ und bezeichnen mit

$$\varrho_1 = \varrho_n^1(t_n^1) \cdots \varrho_2^1(t_2^1) \tag{7. 4}$$

die einzige elementare Rotation (s. **5. 4** und **5. 5**), für die $\eta_1 = \varrho_1 \xi_1$ ist. Nach (5. 5) gilt

$$\cos t_2^1 \cos t_3^1 \cdots \cos t_n^1 = \cos \alpha(\xi_1, \eta_1) \geqq \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7. 5}$$

Aus (7. 3) und (7. 5) folgt

$$0 \leqq t_j^1 \leqq \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (j = 2, \ldots, n) \quad \left(0 \leqq \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2}\right). \tag{7. 6}$$

Wir haben bewiesen, daß ξ_1 durch eine Rotation $\varrho_1(t^1)$ in einen Vektor η_1 parallel zu einer Kante von $K = \varkappa(\varrho)$ sich drehen läßt, wo $0 \leqq t_i' \leqq \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2}$ $(i = 2, \ldots, n)$ gilt. Dies ist der erste Schritt eines induktiven Verfahrens. Im nächsten Schritt fahren wir auf ähnliche Weise fort, und zwar halten wir η_1 fest und drehen $\varrho_1 \xi_2$ in einen Vektor $\eta_2 = \varepsilon_2 \zeta_{j_2}$ durch eine elementare Rotation

$$\varrho_2(t^2) = \varrho_n^2(t_n^2) \cdots \varrho_3^2(t_3^2) \text{ mit } 0 \leqq t_j^2 \leqq \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

So erhalten wir endlich eine Rotation $\varrho = \varrho(t) = \varrho(t_1, \ldots, t_N)$, für die

$$0 \leqq t_i \leqq \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2} \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

und $\eta = \varrho \cdot \xi$, $K = K_\eta = \varkappa(\varrho)$ gilt. Satz VI folgt, wenn C^N die folgende Schachtel ist

$$C^N : 0 \leqq t_i \leqq \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{7.7}$$

7.3 Nach **6.3** ist $\sigma \mid C^N$ ein Homöomorphismus, der eine geschlossene N-Zelle

$$\sigma C^N = S_0^N < SO(n) \tag{7.8}$$

definiert. Zu jeder umschreibenden Schachtel $K \in \boldsymbol{K}$ gibt es nach **3.2** eine Menge $\varkappa^{-1}(K)$ von ν Urbildern. Satz VI bedeutet, daß S_0^N wenigstens ein Element aus jeder solchen Menge $\varkappa^{-1}(K)$ enthält.

Im allgemeinen ist die Bildmenge $g\sigma C^N = gS_0^N$ nicht symmetrisch in bezug auf s^{n-1}, aber zwischen der Menge $gSO(n)$ und der Menge gS_0^N gilt folgende Beziehung: $gSO(n)$ enthält dann und nur dann einen Punkt $p \in s^{n-1}$, wenn die baryzentrischen Koordinaten von p eine Permutation der baryzentrischen Koordinaten eines Punktes von gS_0^N sind.

Jetzt kann man die Beweisführung des zitierten dimensionstheoretischen Satzes[5]) anwenden, um zu beweisen, daß

$$\operatorname{Dim} \varkappa^{-1} q = \operatorname{Dim} W \geqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{7.9}$$

gilt (s. **4.4** und **4.5**). Daraus folgt Satz I.

8. Über die Vermutung.

Im Falle $n = 3$ ist $N = 3$. Die Schachtel

$$B^3 : |t_1| \leqq \pi, \quad |t_2| \leqq \frac{\pi}{2}, \quad |t_3| \leqq \pi \tag{8.1}$$

ist durch t_3-Strecken gefasert, wo eine t_3-*Strecke* eine Strecke parallel zur t_3-Achse bedeutet.

8.1 Durch die Abbildung σ wird diese Faserung in eine singuläre Faserung von $P^3 = SO(3)$ übergeführt. Wir finden es bequem, $P^3 = SO(3)$ als B^3 mit Randpunktidentifizierungen zu betrachten (s. **6.3**), und den Ausdruck t_3-*Strecken* für die Fasern zu bewahren.

Auf jeder t_3-Strecke T_3 bleibt $c_1(t) = c_1(t_1, t_2, t_3)$ fest, während $c_2(t)$ und $c_3(t)$ sich wie im Falle $n = 2$ (§ 5) als Funktionen von t_3 verhalten. In der Tat sind diese die zwei Kantenlängenfunktionen im Falle $n = 2$ für die orthogonale Projektion von A in die (η_2, η_3)-Ebene. Daher gilt

$$\begin{aligned} c_2\left(t_1, t_2, t_3 + \frac{\pi}{2}\right) &= c_3(t_1, t_2, t_3) \\ c_3\left(t_1, t_2, t_3 + \frac{\pi}{2}\right) &= c_2(t_1, t_2, t_3) \end{aligned} \qquad \text{(s. (5.2), (5.3))}. \tag{8.2}$$

8.2 Das heißt, die Werte $c_2(t)$ und $c_3(t)$ wechseln sich auf jeder Teilstrecke der Länge $\frac{\pi}{2}$ von einer t_3-Strecke T_3 ab. Daher gibt es auf jeder solchen Teilstrecke wenigstens einen Punkt der Menge

$$C_{23} : c_2(t) = c_3(t). \tag{8.3}$$

Wir bemerken, daß die drei Mengen $C_{12} : c_1(t) = c_2(t)$, $C_{13} : c_1(t) = c_3(t)$ und C_{23} topologisch äquivalent in bezug auf P^3 sind. Jedoch ist C_{23} leichter zu betrachten wegen

[5]) *Hurewicz* und *Wallman*, loc. cit.

der Auswahl der Parameter (t). Wir bemerken die Beziehung

$$V = C_{12} \cap C_{23}. \tag{8.4}$$

8.3 Der Fall $W = K$ von Satz I ist trivial. Darum nehmen wir an, daß $K - W$ nicht leer ist; das heißt, daß Punkte auf P^3 existieren, so daß $c_3(t) > c_2(t)$ gilt.

Mit D_+ und D_- bezeichnen wir die Mengen, die durch die entsprechenden folgenden Ungleichungen definiert sind:

$$\begin{aligned} D_+ &: c_3(t) > c_2(t), \\ D_- &: c_3(t) < c_2(t). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Nach (8.2) hat C_{23} die Periode $\frac{\pi}{2}$ in bezug auf t_3, und eine Translation durch $\frac{\pi}{2}$ in der t_3-Richtung vertauscht D_+ mit D_- und umgekehrt. Die Menge C_{23} trennt D_+ von D_- auf P^3. Eine t_3-Strecke T_3 erfüllt eine der folgenden zwei Bedingungen: 1) $T_3 < C_{23}$ oder 2) T_3 schneidet D_+, D_- und C_{23}. Nach **8.3** gibt es t_3-Strecken, die 2) erfüllen.

8.4 Satz VII. *Wenn C_{23} eine stetige Schnittfläche C_{23}^0 der t_3-Strecken enthält, dann enthält V einen Teilraum, der homöomorph zu einer Menge $\Delta < E^2$ ist, wo $E^2 - \Delta$ nicht zusammenhängend ist.*

Wir wissen nicht, ob die Hypothese dieses Satzes im allgemeinen erfüllt ist.

Beweis des Satzes:

8.5 Hilfssatz. *B_0^2 bezeichne den Schnitt $t_3 = 0$ von P^3. Auf B_0^2 nimmt die Funktion c_1 jede Kantenlänge der umschreibenden Schachteln an.*

Beweis des Hilfssatzes: In der kanonischen Faktorisierung $\varrho = \varrho_2(t_3)\, \varrho_1(t_1, t_2)$ hängt ϱ_1 nur von (t_1, t_2) ab. Durch ϱ_1 wird ξ_1 in einen willkürlichen Einheitsvektor η_1 gedreht. Daraus folgt der Hilfssatz.

Jetzt seien q_0, q_1 zwei Punkte von B_0^2, mit

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad c_1(q_0) = \min\ \{c_1(t) \mid (t) \in P^3\}, \\ &\text{(b)} \quad c_1(q_1) = \max\ \{c_1(t) \mid (t) \in P^3\}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Γ_0 sei eine (stetige) Kurve auf B_0^2 von q_0 nach q_1 mit einem Parameter τ, wobei $\Gamma_0(0) = q_0$ und $\Gamma_0(1) = q_1$ ist.

8.6 Als Folge von **8.5** nimmt $c_1(q_\tau)$ jede Kantenlänge an, wenn q_τ den Punkt auf Γ_0 mit dem Parameterwert τ bezeichnet $(0 \leqq \tau \leqq 1)$.

Γ sei die Kurve auf der Schnittfläche C_{23}^0, die auf Γ_0 durch die Projektion $C_{23}^0 \to B_0^2$ abgebildet wird, $T_3(\tau)$ sei die t_3-Strecke durch den Punkt von Γ_0 mit dem Parameterwert τ und $r(\tau)$ sei der Durchschnittspunkt

$$r(\tau) = T_3(\tau) \cap \Gamma. \tag{8.7}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} c_1 &\leqq c_2 = c_3 \qquad \text{für } r(0), \\ c_1 &\geqq c_2 = c_3 \qquad \text{für } r(1) \end{aligned} \tag{8.8}$$

als Folge von (8.6) und der Tatsache, daß c_1 auf jedem $T_3(\tau)$ konstant ist. Daher gibt es einen Wert $\tau^*(0 < \tau^* < 1)$, für den $c_1 = c_2 = c_3$ für $r(\tau^*)$ gilt. Das heißt, auf jeder Kurve auf B_0^2 von q_0 nach q_1 liegt die Projektion eines Punktes von C_{23}^0, der aus V ist (s. (4.2)). Satz VII folgt dann.

Im Paragraphen 8 wurde eine Untersuchung der Vermutung **2.6** im Falle $n = 3$ begonnen. Wir hoffen, sie in einer späteren Abhandlung fortzusetzen.

Eingegangen 9. November 1960.

Shifts on Hilbert spaces[1]).

By *Paul R. Halmos*, University of Chicago.

Introduction.

Does every operator on an infinite-dimensional Hilbert space have a non-trivial invariant subspace? The question is still unanswered. A possible approach is to classify all invariant subspaces of all known operators in the hope of getting an insight that will lead to a proof or a counterexample; this paper is a step in that direction. The operators selected for study are certain special isometries, called shifts. There are two reasons for this choice. First, shifts constitute perhaps the simplest and most natural class of operators for which the classification problem is solvable but not trivial. Second, shifts are known to be typically infinite-dimensional operators, and it is not unreasonable to hope that their study, even if it does not lead to a solution of the existence problem, might make further work on the classification problem easier.

Shifts can be discrete or continuous, they can go in one direction or in two, and they can have finite multiplicity or infinite. The study of invariant subspaces of shifts was begun by Beurling [1]; he considered discrete unilateral shifts of multiplicity one, and he used analytic function theory. The study was continued by Lax [4]; he considered continuous unilateral shifts of finite multiplicity, and he used the theory of Fourier transforms in the complex domain. This paper considers discrete shifts, both unilateral and bilateral, of countable multiplicity; the methods belong to the geometry of Hilbert space. The difference between discrete and continuous is not very important; it is more technical than conceptual. The difference between unilateral and bilateral is somewhat greater, but, as the geometric method shows, it is still not profound. The principal advantages claimed for this paper are the simplicity of the methods and the validity of the results for infinitely multiple shifts. Except for the difference between discrete and continuous, the latter settles a problem raised by Lax in connection with certain partial differential equations.

Discrete shifts can be defined in terms of sequences (functions of integers) or alternatively (dually) in terms of functions on the circle. In the sequential representation certain invariant subspaces of a rather simple structure become clearly visible. The pertinent concept is this: a subspace of a Hilbert space is a *wandering* subspace for an operator A if it is orthogonal to all its images under the (positive) powers of A. For any operator A, the span of the images of any subspace under the (non-negative) powers of A is invariant under A; if the operator is an isometry and if the subspace is a wandering one, the structure of the invariant subspace so spanned and the behavior of the operator

[1]) Research supported in part by a grant from the National Science Foundation.

on that subspace are especially clear. Theorem 2 below says (for unilateral shifts) that every invariant subspace is obtained from a wandering subspace in the way just described. (For bilateral shifts the statement needs a slight modification.) Beurling and Lax prefer to represent shifts on function spaces (as opposed to sequence spaces) and to characterize invariant subspaces as the ranges of certain multiplication operators; the extension of that result to shifts of possibly infinite multiplicity appears below in Theorem 3 (existence) and Theorem 4 (uniqueness).

Wandering subspaces.

Fix an operator A and consider the correspondence that assigns to each wandering subspace $\mathfrak{N}$ the invariant subspace $\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} A^n\mathfrak{N}$. It is important to know that this correspondence is one-to-one, in the sense that $\mathfrak{N}$ is uniquely determined by $\mathfrak{M}$. Indeed, since $A\mathfrak{M} = \bigvee_{n=1}^{\infty} A^n\mathfrak{N}$, so that $A\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$, it follows that $\mathfrak{N}$ is the orthogonal complement of $A\mathfrak{M}$ within $\mathfrak{M}$. Equivalently, $\mathfrak{N}$ is the orthogonal complement of the range of the operator obtained by restricting A to $\mathfrak{M}$.

The preceding argument suggests a way to construct examples of wandering subspaces: given the operator A, let $\mathfrak{K}$ be the orthogonal complement of the range of A. To say that $\mathfrak{K}$ is a wandering subspace for A means that if f and g are in $\mathfrak{K}$, and if $n > 0$, then $(A^n f, g) = 0$, and that is obviously true, even if f is not in $\mathfrak{K}$. To be sure, if the range of A is the entire space, then the example obtained in this way is a trivial one, and the same is true, though for a different reason, if $A = 0$. For most operators A, however, the construction yields a non-trivial example of a wandering space. Observe that the space $\mathfrak{K}$ could also have been described as the kernel (null space) of the adjoint operator A^*, but that description would not have been particularly helpful here.

For isometries, wandering subspaces behave better than usual: if U is an isometry, and if $\mathfrak{N}$ is a wandering subspace for U, then $U^m\mathfrak{N} \perp U^n\mathfrak{N}$ whenever m and n are distinct non-negative integers. In other words, if f and g are in $\mathfrak{N}$, then $U^m f \perp U^n g$. For the proof, assume that $m > n$ (this can always be achieved, by a change of notation if necessary); then

$$(U^m f, U^n g) = (U^{*n} U^m f, g) = (U^{m-n} f, g) = 0,$$

since $\mathfrak{N}$ is a wandering subspace. (Recall that since U is an isometry, $U^* U = 1$.) If U is unitary, even more is true: in that case $U^m\mathfrak{N} \perp U^n\mathfrak{N}$ (for a wandering subspace $\mathfrak{N}$) whenever m and n are any two distinct integers (possibly negative). Proof: given m and n, with $m \neq n$, find k so that $m + k$ and $n + k$ are positive; if f and g are in $\mathfrak{N}$, then $(U^m f, U^n g) = (U^{m+k} f, U^{n+k} g) = 0$, by the result for isometries.

Lemma 1. *If U is an isometry on a Hilbert space $\mathfrak{H}$ and if $\mathfrak{K} = (U\mathfrak{H})^\perp$ is the orthogonal complement of the range of U, then* $\left(\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n\mathfrak{K}\right)^\perp = \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n\mathfrak{H}$.

Remark. The lemma will be used in the form stated, but it will be proved in a slightly different form. The left side of the asserted equation is equal to $\bigcap_{n=0}^{\infty} (U^n\mathfrak{K})^\perp$, and the proof will show that this is equal to the right side.

Proof. Assume that $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (U^n\mathfrak{K})^\perp$ and prove by induction that $f \in U^n\mathfrak{H}$ for all n. For $n = 0$ this is trivial. Assume therefore that $f \in U^n\mathfrak{H}$, so that $f = U^n g$ for some g.

Since $f \in (U^n \mathfrak{K})^\perp$, i. e., $U^n g \perp U^n \mathfrak{K}$, it follows that $g \perp \mathfrak{K}$. This implies that $g \in U\mathfrak{H}$, and hence that $f = U^n g \in U^{n+1}\mathfrak{H}$, as desired. Conclusion: $\bigcap_{n=0}^{\infty} (U^n \mathfrak{K})^\perp \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{H}$.

To prove the reverse inclusion, use the geometric generality that $U\mathfrak{M}^\perp \subset (U\mathfrak{M})^\perp$ for all subspaces $\mathfrak{M}$. (Indeed, if $f \in \mathfrak{M}^\perp$, so that Uf is a typical element of $U\mathfrak{M}^\perp$, and if $g \in \mathfrak{M}$, so that Ug is a typical element of $U\mathfrak{M}$, then $Uf \perp Ug$ follows, since U is an isometry, from $f \perp g$.) Now compute:

$$U^{n+1}\mathfrak{H} = U^n(U\mathfrak{H}) = U^n \mathfrak{K}^\perp \subset (U^n \mathfrak{K})^\perp,$$

and the result follows.

Lemma 1 implies that if U is an isometry on $\mathfrak{H}$ and if $\mathfrak{K} = (U\mathfrak{H})^\perp$, then $\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{K}$ reduces U. Indeed, the space $\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{K}$ is obviously invariant under U; the lemma implies that the same is true of its orthogonal complement.

Unilateral shifts.

There are two extreme kinds of isometries on a Hilbert space $\mathfrak{H}$, the unitary ones and the pure ones; every isometry is a mixture of those two kinds. (A brisk summary of the main facts about isometries was given by Brown [2].) To motivate the definition of purity, recall that an isometry U is unitary if and only if $U\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, or, equivalently, $(U\mathfrak{H})^\perp = \{0\}$. A pure isometry behaves as differently as possible; the definition requires that $\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{K} = \mathfrak{H}$, where, as before, $\mathfrak{K} = (U\mathfrak{H})^\perp$. It is irrelevant for the purposes of this paper, but it might be of interest to observe, that, whenever U is an isometry, $f \in \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{K}$ if and only if $U^{*n} f \to 0$, and hence that U is pure if and only if $U^{*n} \to 0$ tends strongly to 0 as $n \to \infty$.

Here is the usual way to construct a pure isometry. Let $\mathfrak{B}$ be a Hilbert space, and let $\mathfrak{H}_+$ be the direct sum of a countable collection of copies of $\mathfrak{B}$ indexed by the non-negative integers. (The reason for the plus sign will become clear later; for the time being it may be regarded as a harmless decoration.) In other words, an element f of $\mathfrak{H}_+$ is a norm-square-summable sequence $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ whose terms are in $\mathfrak{B}$. (Norm and inner product in $\mathfrak{H}_+$ are given by $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2$ and $(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)$; the linear operations are defined coordinatewise, of course.) If an operator U_+ is defined on $\mathfrak{H}_+$ by

$$U_+\{f_0, f_1, f_2, \ldots\} = \{0, f_0, f_1, f_2, \ldots\},$$

then it is clear that U_+ is an isometry. The range of U_+ is the set of f's with $f_0 = 0$; if $\mathfrak{K}$ is the orthogonal complement of that range, then $\mathfrak{K}$ is the set of f's with $f_n = 0$ for all $n \neq 0$. (Note that the projection $f \to f_0$, restricted to $\mathfrak{K}$, is an isomorphism between $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{B}$.) It follows that $U_m^+ \mathfrak{K}$ is the set of f's with $f_n = 0$ for all $n \neq m$, and hence that U_+ is a pure isometry. The operator U_+ is called a *shift*, or, more precisely, the *unilateral shift* based on $\mathfrak{B}$. Since, to within isomorphism, the dimension of $\mathfrak{B}$, say N, is the only thing that distinguishes U_+ from other unilateral shifts, U_+ may also be called the unilateral shift of *multiplicity* N.

Unilateral shifts are more than special examples of pure isometries; the definition of purity shows that each pure isometry is isomorphic to some unilateral shift. (If, in

the notation consistently used above, $\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{K} = \mathfrak{H}$, then each f in $\mathfrak{H}$ has a unique representation as an orthogonal series $\sum_{n=0}^{\infty} U^n f_n$, with f_n in $\mathfrak{K}$ for all n.) Most of the remainder of this paper is devoted to the study of unilateral shifts, and the notation for them, introduced above, will remain fixed from now on. The essential fixed data are $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{K}$ and U_+. To be sure, on two occasions below, $\mathfrak{H}_+$ and U_+ will be identified with certain isomorphic versions of themselves, but the identification will be natural and it will not call for a change of notation.

Commutativity.

The simplest invariant subspaces for an operator are the ones that reduce the operator. A subspace $\mathfrak{M}$ reduces an operator A if and only if the projection on $\mathfrak{M}$ commutes with A. Since a projection is Hermitian, it commutes with an operator A if and only if it commutes with both A and A^*. It follows that a natural way to generalize the determination of all subspaces that reduce A is to determine all operators that commute with both A and A^*. For unilateral shifts this turns out to be quite easy.

Each operator C on $\mathfrak{B}$ induces in a natural way an inflated operator $\hat{C}$ on $\mathfrak{H}_+$; by definition

$$\hat{C}\{f_0, f_1, f_2, \ldots\} = \{Cf_0, Cf_1, Cf_2, \ldots\}.$$

It is an elementary exercise to prove that the inflation correspondence $C \to \hat{C}$ preserves the linear operations, products, adjoints, and norms; it is an embedding of the operator algebra on $\mathfrak{B}$ into the one on $\mathfrak{H}_+$.

Theorem 1. *An operator A commutes with both U_+ and U_+^* if and only if $A = \hat{C}$ for some operator C on $\mathfrak{B}$.*

Proof. To prove something about U_+^*, it helps to know what it is. The answer (easily verified) is that

$$U_+^*\{f_0, f_1, f_2, \ldots\} = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}.$$

Now to verify that each $\hat{C}$ commutes with both U_+ and U_+^* is just a straightforward computation. The product of U_+ and $\hat{C}$, in either order, sends

$$\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$$

onto

$$\{0, Cf_0, Cf_1, Cf_2, \ldots\},$$

and the product of U_+^* and $\hat{C}$, in either order, sends it onto

$$\{Cf_1, Cf_2, Cf_3, \ldots\}.$$

For the converse, assume that A commutes with both U_+ and U_+^*. Since $\mathfrak{K}$ is the kernel of U_+^*, it follows that if $f \in \mathfrak{K}$, then $U_+^* Af = AU_+^* f = 0$. This implies that $Af \in \mathfrak{K}$ whenever $f \in \mathfrak{K}$, i. e., that $\mathfrak{K}$ is invariant under A. Let C be the operator on $\mathfrak{B}$ defined as follows: if $f_0 \in \mathfrak{B}$ and if $f = \{f_0, 0, 0, 0, \ldots\}$ then $f \in \mathfrak{K}$, so that $Af \in \mathfrak{K}$, and, therefore, $Af = \{g_0, 0, 0, 0, \ldots\}$; put $Cf_0 = g_0$. (The operator C is isomorphic, under the natural isomorphism between $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{K}$, to the restriction of A to $\mathfrak{K}$.) It follows that $Af = \hat{C}f$ at least when $f \in \mathfrak{K}$, and this implies that if $f \in \mathfrak{K}$, then

$$AU_+^n f = U_+^n Af = U_+^n \hat{C}f = \hat{C}U_+^n f$$

(since both A and $\hat{C}$ commute with U_+). Since, finally, $\bigvee_{n=0}^{\infty} U_+^n \mathfrak{K} = \mathfrak{H}$, it follows that $Af = \hat{C}f$ for all f, and the proof is complete.

Two special cases of the theorem are worthy of note. First, if U_+ is simple (that means that it has multiplicity one), then the only operators on $\mathfrak{B}$ are scalars; since the inflation of a scalar is a scalar, it follows that the only operators that commute with both the simple unilateral shift and its adjoint are the scalars. Second, since $\hat{C}$ is a projection if and only if C is a projection, the theorem gives a usable description of all reducing subspaces of U_+ (for all multiplicities). The result is that there is a one-to-one correspondence between all subspaces of $\mathfrak{B}$ and those subspaces of $\mathfrak{H}_+$ that reduce U_+; the reducing subspace of $\mathfrak{H}_+$ corresponding to a subspace of $\mathfrak{B}$ consists of the sequence whose terms belong to the given subspace. (This consequence of Theorem 1 appears in [2].) The two special cases combined yield the result that the simple unilateral shift is irreducible (i. e., it has no non-trivial reducing subspaces).

Bilateral shifts.

A subspace invariant under an operator A may reduce A, or it may be *irreducible*, in the sense that none of its non-zero subspaces reduces A. (Equivalently: a subspace is irreducible for A if the restriction of A to the subspace is an irreducible operator.) For every operator, each invariant subspace is the direct sum of a reducing subspace and an irreducible invariant subspace, and this decomposition is unique. (Just take the span of all the reducing subspaces included in the given subspace.) Since all the reducing subspaces for the unilateral shifts can be considered known, it remains only to determine all their irreducible invariant subspaces. This problem can be solved by methods that work just as well for a slightly generalized version; what follows is the formulation and solution of the generalized problem.

Consider, as before, a Hilbert space $\mathfrak{B}$, and let $\mathfrak{H}$ be the direct sum of a countable collection of copies of $\mathfrak{B}$ indexed by the set of all integers. In other words, an element f of $\mathfrak{H}$ is a norm-square-summable bilateral sequence

$$\{\ldots, f_{-2}, f_{-1}, (f_0), f_1, f_2, \ldots\}$$

whose terms are in $\mathfrak{B}$; linear operations, inner product, and norm are defined just as for unilateral sequences. (The parentheses in the sequence symbol are merely a notational device; they indicate the term that occupies position 0.) Let U be the operator on $\mathfrak{H}$ defined by

$$U\{\ldots, f_{-2}, f_{-1}, (f_0), f_1, f_2, \ldots\} = \{\ldots, f_{-3}, f_{-2}, (f_{-1}), f_0, f_1, \ldots\}.$$

It is clear that U is unitary; the adjoint (which is the same as the inverse) of U is defined by

$$U^*\{\ldots, f_{-2}, f_{-1}, (f_0), f_1, f_2, \ldots\} = \{\ldots, f_{-1}, f_0, (f_1), f_2, f_3, \ldots\}.$$

The operator U is called the *bilateral shift* based on $\mathfrak{B}$, or, in case $\dim \mathfrak{B} = N$, the bilateral shift of *multiplicity* N.

The space $\mathfrak{H}_+$ studied before is naturally isomorphic to a subspace of $\mathfrak{H}$; the isomorphism is the one that maps $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ onto $\{\ldots, 0, 0, (f_0), f_1, f_2, \ldots\}$. It is convenient to identify $\mathfrak{H}_+$ with isomorphic copy, and that is hereby done. With that understood, it makes sense to say and it is trivial to see that $\mathfrak{H}_+$ is invariant under the bilateral shift U, and that, in fact, the restriction of U to $\mathfrak{H}_+$ is just the unilateral shift U_+. The wandering subspace $\mathfrak{K}$ of $\mathfrak{H}_+$ that played a role before is still of some importance;

in the present notation $\mathfrak{K}$ consists of the set of bilateral sequences f with $f_n = 0$ for all $n \neq 0$. The fixed data from now on are the spaces $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_+$, and $\mathfrak{K}$, and the operators U and U_+.

The general problem to be solved is the determination of all irreducible invariant subspaces for bilateral shifts. The lemma that follows implies that this problem for bilateral shifts is indeed more general than the same problem for unilateral shifts. A "geometric" solution of the problem is given by Theorem 2; the more familiar "analytic" solution is in Theorem 3.

Lemma 2. *If $\mathfrak{N}$ is a wandering subspace for the bilateral shift U and if $\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{N}$, then $\mathfrak{M}$ is an irreducible invariant subspace for U.*

Proof. Only the irreducibility of $\mathfrak{M}$ needs proof. If $f \in \mathfrak{M}$, $f \neq 0$, then $f = \sum_{n=0}^{\infty} U^n f_n$, with $f_n \in \mathfrak{N}$ for all $n \geqq 0$, and $f_m \neq 0$ for some $m \geqq 0$. The non-zero component $U^m f_m$ may be characterized as the projection of f into the subspace $U^m \mathfrak{N}$; by the same token, f_m is equal to the projection of $U^{-(m+1)} f$ into the subspace $U^{-1}\mathfrak{N}$. Since $U^{-1} = U^*$, and since $U^{-1}\mathfrak{N}$ is orthogonal to $\mathfrak{M}$, it follows that every non-zero element of $\mathfrak{M}$ is mapped out of $\mathfrak{M}$ by a suitable power of U^*, and hence that $\mathfrak{M}$ cannot include a non-zero subspace invariant under U^*.

It is a special case of this lemma (put $\mathfrak{N} = \mathfrak{K}$) that $\mathfrak{H}_+$ is an irreducible invariant subspace for U. Since a subspace of $\mathfrak{H}_+$ is invariant under U_+ if and only if it is invariant under U, it follows that any determination of all irreducible invariant subspaces for U automatically serves to determine all invariant subspaces (irreducible or not) for U_+. Note in particular that the reducing subspaces for U_+ described after Theorem 1 above are included among the invariant subspaces described in Theorem 2 below. Thus the reducing subspaces for U_+ receive double coverage in this treatment, and the reducing subspaces for U none at all. The latter are covered by the well known commutativity theory of normal operators (the so-called functional calculus); nothing more needs to be said about them here.

Theorem 2. *If $\mathfrak{M}$ is an irreducible invariant subspace for U [an invariant subspace for U_+], then there exists a wandering subspace $\mathfrak{N}$ for U [for U_+] such that $\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{N}$.*

Proof. The preceding discussion shows that it is sufficient to treat U alone; the theory for U_+ follows. Write $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap (U\mathfrak{M})^{\perp}$; in other words, $\mathfrak{N}$ is the orthogonal complement within $\mathfrak{M}$ of the range of the operator obtained by restricting U to $\mathfrak{M}$. Assertion: $\mathfrak{M} \cap \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{N}\right)^{\perp}$ reduces U. Indeed, Lemma 1, applied to the restriction of U to $\mathfrak{M}$, implies that that subspace is equal to $\bigcap_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{M}$; this makes it obvious that the subspace is invariant under U. (Since $\mathfrak{M} > U\mathfrak{M} > U^2\mathfrak{M} > \cdots$, the intersection of all the terms of this sequence is equal to the intersection of all but the first.) Invariance under $U^* (= U^{-1})$ also follows:

$$U^{-1} \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{M} = U^{-1}\mathfrak{M} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U^{n-1}\mathfrak{M} < \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{M}.$$

Since $\mathfrak{M}$ is irreducible, the subspace just proved to be reducing must be the zero subspace, and that implies the conclusion of the theorem.

It may be of interest to remark that if $\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{N}$ is a reducing subspace for U_+, then $\mathfrak{N} < \mathfrak{K}$, and the corresponding subspace of $\mathfrak{B}$ (as described after Theorem 1) is the

image of $\mathfrak{N}$ under the natural correspondence between $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{V}$; if, on the other hand, $\mathfrak{M}$ is given as $\hat{C}\mathfrak{H}_+$, for some projection C on $\mathfrak{V}$, then $\mathfrak{N} = \hat{C}\mathfrak{K}$.

Functional representation.

Theorem 2 provides some insight into the geometric structure of invariant subspaces for shifts, but it by no means solves all the problems of the theory. It does not, for instance, help in the construction of invariant subspaces, and it does not serve to answer even such a concrete question as this: are there any irreducible invariant subspaces for U other than the easy ones obtained by applying a fixed power of U to $\mathfrak{H}_+$? The next topic to be studied, the functional representation for shifts, furnishes the answer.

Let $Z = \{z\colon |z| = 1\}$ be the unit circle in the complex plane. Interpret measurability in Z in the sense of Borel and measure in the sense of Lebesgue, normalized so that the measure of Z itself is 1. The differential symbol "dz" will be used to indicate integration with respect to this measure.

Let $\mathfrak{V}$ be a Hilbert space; to avoid the pathology of the uncountable, assume from now on that $\mathfrak{V}$ is separable. Let $\mathfrak{H}$ be the set of all measurable functions f from Z to $\mathfrak{V}$ such that $\int \| f(z) \|^2 dz < \infty$; measurability here can be interpreted either weakly or strongly — in view of the separability of $\mathfrak{V}$, the two are equivalent. (See Hille and Phillips [3; Section 3. 5.]) The functions in $\mathfrak{H}$ (modulo sets of measure zero) constitute a Hilbert space with the pointwise definitions of the linear operations and with the inner product given by $(f, g) = \int \big(f(z), g(z)\big)\, dz$. (Here $\big(f(z), g(z)\big)$ is the inner product of the two elements $f(z)$ and $g(z)$ in $\mathfrak{V}$. Note that the separability of $\mathfrak{V}$ implies that $\mathfrak{H}$ is separable.) Consider on the Hilbert space $\mathfrak{H}$ the operator U defined by $(Uf)(z) = zf(z)$. It is easy to verify that U is unitary; $U^{-1} (= U^*)$ is defined by $(U^*f)(z) = \bar{z}f(z)$.

Since the elements of $\mathfrak{H}$ are functions, $\mathfrak{H}$ has some structure that is not definable in every Hilbert space. The most important special feature of $\mathfrak{H}$ is the subspace $\mathfrak{K}$ consisting of all constant functions. In other words, a function f belongs to $\mathfrak{K}$ if and only if there is a vector v in $\mathfrak{V}$ such that $f(z) = v$ for almost all z. Assertion: $\mathfrak{K}$ is a wandering subspace for U, and $\bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} U^n\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$. The first part of the assertion is easy to prove. Suppose, indeed, that $f(z) = u$ and $g(z) = v$ almost everywhere; if $n \neq 0$, then

$$(U^n f, g) = \int \big(z^n f(z), g(z)\big)\, dz = \int (z^n u, v)\, dz = (u, v) \int z^n dz = 0.$$

The second part of the assertion is somewhat deeper. Suppose that $f \in \mathfrak{H}$ and that $f \perp U^n\mathfrak{K}$ for all n; it is to be proved that $f = 0$. The assumption means that $\int \big(f(z), z^n v\big) dz = 0$ for all v in $\mathfrak{V}$ and all n. If $g(z) = \big(f(z), v\big)$, then g is an integrable complex-valued function and all the Fourier coefficients of g vanish. It follows that, for each v, the inner product $\big(f(z), v\big)$ vanishes for almost all z. The separability of $\mathfrak{V}$ implies that $f(z) = 0$ for almost all z, and that is the point at issue.

The preceding result implies that $\mathfrak{H}$ is naturally isomorphic to the space of all bilateral sequences of terms in $\mathfrak{V}$, with the usual linear operations and inner product; the natural isomorphism carries U onto the bilateral shift. It is convenient to identify the new $\mathfrak{H}$ (the function space) with the isomorphic old $\mathfrak{H}$ (the bilateral sequence space), and that is hereby done. Under the identification, the space $\mathfrak{H}_+$ is recognized as $\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n\mathfrak{K}$, and the operator U_+ is, of course, the restriction of U to the invariant subspace $\mathfrak{H}_+$. All the previous considerations are thereby recaptured in the new setting, and the use of the same notation is justified.

The functional representation will presently provide a characterization of wandering subspaces for U that will greatly facilitate the application of Theorem 2. Here are the first two steps in that direction.

Lemma 3. *If f and g are in $\mathfrak{H}$ and if $(U^n f, g) = 0$ for all $n \neq 0$, then $(f(z), g(z))$ is a constant almost everywhere.*

Proof. The assumption says that $\int z^n (f(z), g(z))\, dz = 0$ for all $n \neq 0$. This means that the inner product part of the integrand, which is a complex-valued integrable function, is such that all its Fourier coefficients, except possibly the constant term, are equal to zero.

Lemma 4. *If $\mathfrak{N}$ is a wandering subspace for U, then* $\dim \mathfrak{N} \leqq \dim \mathfrak{V}$.

Proof. Let $\{f_i\}$ be an orthonormal set in $\mathfrak{N}$. Since $\mathfrak{H}$ is separable, the set is countable. Since $\mathfrak{N}$ is a wandering subspace, $(U^n f_i, f_j) = 0$ for all $n \neq 0$. It follows from Lemma 3 that $(f_i(z), f_j(z))$ is a constant almost everywhere. Since

$$\int (f_i(z), f_j(z))\, dz = (f_i, f_j) = \delta_{ij},$$

it follows that $(f_i(z), f_j(z)) = \delta_{ij}$ for almost all z. Since there are only countably many exceptional sets of measure zero to discard, there exists at least one z such that $(f_i(z), f_j(z)) = \delta_{ij}$. This implies that the space $\mathfrak{V}$ includes an orthonormal set of the same cardinality as $\{f_i\}$; the proof is complete.

Operator functions.

The functional structure of $\mathfrak{H}$ suggests the consideration of certain special operators. Suppose that F is a function on Z whose values are operators on $\mathfrak{V}$. If $f \in \mathfrak{H}$, then $F(z) f(z)$ makes sense for each z in Z; write $(Ff)(z) = F(z) f(z)$. Does Ff belong to $\mathfrak{H}$? The answer is yes if F is measurable (weakly or strongly — as before, it is all the same) and essentially bounded. The latter means that the essential (i. e., almost everywhere) supremum of $\| F(z) \|$, for z in Z, is finite; the value of that essential supremum is then the norm $\| \hat{F} \|$ of the operator $\hat{F}$. The mapping $F \to \hat{F}$ preserves the linear operations, products, adjoints, and norms; it is an embedding of the algebra of bounded measurable $\mathfrak{V}$-operator functions (modulo sets of measure zero, of course) into the operator algebra on $\mathfrak{H}$. If F is a constant almost everywhere, then the operator $\hat{F}$ here defined coincides (at least on $\mathfrak{H}_+$) with the inflation of that constant as defined before; the passage from F to $\hat{F}$, for any bounded measurable operator function F, may be regarded as a generalized inflation. If F is a scalar multiple of the identity almost everywhere, then $\hat{F}$ commutes with $\hat{G}$ for every G. This applies, in particular, to the function given by $F(z) = z \cdot 1$; in that case $\hat{F} = U$, of course.

Certain operator functions can be used to give examples of wandering spaces. Suppose, to begin with, that $F(z)$ is an isometry on $\mathfrak{V}$ for almost all z. (Measurability is always assumed.) Assertion: the subspace $\hat{F}\mathfrak{K}$ is a wandering subspace for U. (Recall that $\mathfrak{K}$ consists of those vector functions in $\mathfrak{H}$ that are constant almost everywhere.) Proof: if $f(z) = F(z)\, u$ and $g(z) = F(z)\, v$, with u and v in $\mathfrak{V}$, then

$$\begin{aligned}(U^n f, g) &= \int (z^n F(z)\, u, F(z)\, v)\, dz = \int z^n (F(z)\, u, F(z)\, v)\, dz = \int z^n (u, v)\, dz \\ \text{(since } F(z) \text{ is an isometry)} \quad &= (u, v) \int z^n dz = 0\end{aligned}$$

for all $n \neq 0$. The same proof works for an unavoidable technical generalization of the result. Suppose, in fact, that $\mathfrak{U}$ is a subspace of $\mathfrak{V}$ and that, for almost all z, the operator

$F(z)$ is a partial isometry on $\mathfrak{V}$ with initial space $\mathfrak{U}$. (This means that $\|F(z)\,u\| = \|u\|$ when $u \in \mathfrak{U}$, and $F(z)\,u = 0$ when $u \perp \mathfrak{U}$.) It follows that $(F(z)\,u, F(z)\,v)$ is a constant (independent of z), and that is all that was needed in the proof just given. For a concise summary of the result it is convenient to make the following definition: an operator function F is *rigid* if there exists a subspace $\mathfrak{U}$ of $\mathfrak{V}$ such that F is almost everywhere an isometry on $\mathfrak{U}$ and zero on $\mathfrak{U}^\perp$. Conclusion: if F is rigid, then $\hat{F}\mathfrak{K}$ is a wandering subspace for U. This conclusion implies that if F is rigid, then $\hat{F}\mathfrak{H}_+$ is an irreducible invariant subspace for U. Indeed, $\hat{F}\mathfrak{H}_+ = \hat{F} \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n\mathfrak{K} = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n(\hat{F}\mathfrak{K})$, and the result follows from Lemma 2. Note that invariance is easy to prove directly (from the commutativity of $\hat{F}$ and U); the result for wandering subspaces, and Lemma 2, are needed to prove irreducibility.

The preceding discussion of U on $\mathfrak{H}$ leaves unanswered one question about U_+ on $\mathfrak{H}_+$. If $\hat{F}\mathfrak{K}$ is a wandering subspace for U_+, then $\hat{F}\mathfrak{K}$ is included in $\mathfrak{H}_+$ (or, equivalently, $\hat{F}\mathfrak{H}_+$ is included in $\mathfrak{H}_+$); under what conditions does that happen? Here is one answer: for a bounded measurable operator function F, the operator $\hat{F}$ maps $\mathfrak{K}$ into $\mathfrak{H}_+$ if and only if $\int (F(z)\,u, v)\bar{z}^n\,dz = 0$ for all u and v in $\mathfrak{V}$ and for all $n < 0$. Indeed: $\hat{F}\mathfrak{K}$ is orthogonal to $\mathfrak{H}_+^\perp$ if and only if $(\hat{F}f, U^n g) = 0$ for all f and g in $\mathfrak{K}$ and for all $n < 0$, and this is equivalent to the vanishing of $\int (F(z)\,u, z^n v)\,dz$ for all u and v in $\mathfrak{V}$ and for all $n < 0$. This characterization of the F's with $\hat{F}\mathfrak{K} < \mathfrak{H}_+$ says, roughly speaking, that all the Fourier coefficients of F with negative index are equal to zero. For this reason, an operator function F such that $\hat{F}\mathfrak{K} < \mathfrak{H}_+$ will be called a *Taylor* function below; the idea is that it behaves the way Taylor series behave (as opposed to Laurent series). Conclusion: if F is a rigid Taylor function, then $\hat{F}\mathfrak{K}$ is a wandering subspace and $\hat{F}\mathfrak{H}_+$ is an invariant subspace for U_+.

It is easy to construct some rigid operator functions, and even rigid Taylor functions, and thus to construct non-trivial examples of invariant subspaces for U_+ and irreducible invariant subspaces for U. Suppose, for instance, that $\mathfrak{V}$ is the two-dimensional complex coordinate space; in that case an operator on $\mathfrak{V}$ is naturally identifiable with a two-rowed matrix. If, for a concrete example, $F(z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z^2+1 & 0 \\ z^2-1 & 0 \end{pmatrix}$, then it is easy to verify that $F(z)$ is, for each z, a partial isometry whose initial space is the set of all vectors with vanishing second coordinate, and hence that F is a rigid operator function. (It is even a Taylor function.)

If $\dim \mathfrak{V} = 1$, then operator functions may be regarded as ordinary complex numerical functions. An arbitrary measurable function of constant absolute value 1 is a rigid function. If, in particular, $e_n(z) = z^n$, then each e_n is a rigid function; for $n \geqq 0$, the e_n's are even Taylor functions. More interesting examples of one-dimensional rigid Taylor functions exist, but they are not quite so easy to see. There is a bit of a theory associated with the subject; an elegant recent discussion of the basic facts has been given by Rudin [5].

Invariant subspaces.

The purpose of what follows is to prove that the preceding construction of wandering and invariant subspaces succeeds in constructing them all.

Lemma 5. *If $\mathfrak{N}$ is a wandering subspace for U [for U_+], then there exists a rigid function F [a rigid Taylor function F] such that $\mathfrak{N} = \hat{F}\mathfrak{K}$.*

Proof. The preceding discussion shows that it is sufficient to treat U alone; the theory for U_+ follows. Since, by Lemma 4, $\dim \mathfrak{N} \leqq \dim \mathfrak{V}$, there exists a subspace $\mathfrak{U}$ of $\mathfrak{V}$ with $\dim \mathfrak{U} = \dim \mathfrak{N}$. Let A be an operator from $\mathfrak{V}$ to $\mathfrak{N}$ such that A maps $\mathfrak{U}$ isometrically onto $\mathfrak{N}$ and such that A maps $\mathfrak{U}^\perp$ onto 0. If F is defined by $F(z)\, v = (Av)(z)$ for each v in $\mathfrak{V}$, then F is a measurable operator function. Since $Av \in \mathfrak{N}$, so that $(U^n Av, Av) = 0$ for all $n \neq 0$, Lemma 3 implies that $\| F(z)\, v \|$ is a constant almost everywhere, and hence, in particular, that F is bounded. If $v \in \mathfrak{U}$, then

$$\| v \|^2 = \| Av \|^2 = \int \| (Av)(z) \|^2 dz = \int \| F(z)\, v \|^2 dz,$$

so that the constant $\| F(z)\, v \|$ is equal to $\| v \|$ almost everywhere; this means that almost every $F(z)$ is an isometry on $\mathfrak{U}$. (To see that the "almost every" is independent of v, argue separately for each v in a basis.) If $v \in \mathfrak{U}^\perp$, then $Av = 0$, and, again, it follows that almost every $F(z)$ annihilates $\mathfrak{U}$. This proves that almost every $F(z)$ is a partial isometry with initial space $\mathfrak{U}$, and hence, in particular, that F is rigid. If $f \in \mathfrak{K}$, so that $f(z) = v$ almost everywhere, for some v in $\mathfrak{V}$, then $(\hat{F}f)(z) = F(z)\, v = (Av)(z)$, so that $\hat{F}\mathfrak{K} < \mathfrak{N}$. If, conversely, $g \in \mathfrak{N}$, so that $g = Av$ for some v in $\mathfrak{V}$ (in fact for some v in $\mathfrak{U}$), and if $f(z) = v$ for all z, then $f \in \mathfrak{K}$ and $g(z) = (Av)(z) = (\hat{F}f)(z)$, so that $\mathfrak{N} < F\mathfrak{K}$. The proof of the lemma is complete.

Theorem 3. *If $\mathfrak{M}$ is an irreducible invariant subspace for U [an invariant subspace for U_+], then there exists a rigid function F [a rigid Taylor function F] such that $\mathfrak{M} = \hat{F}\mathfrak{H}_+$.*

Proof. By Theorem 2, there exists a wandering subspace $\mathfrak{N}$ such that $\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{N}$; by Lemma 5, $\mathfrak{N} = \hat{F}\mathfrak{K}$ for some rigid function F (which is a rigid Taylor function in case $\mathfrak{M} < \mathfrak{H}_+$). The conclusion follows by inverting an argument used earlier:

$$\mathfrak{M} = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n(\hat{F}\mathfrak{K}) = \hat{F} \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{K} = \hat{F}\mathfrak{H}_+.$$

The proof of Lemma 5 involves two arbitrary choices ($\mathfrak{U}$ and A); this makes it difficult to see to what extent, if any, the rigid function F is uniquely determined by the wandering subspace $\mathfrak{N}$ in Lemma 5 or by the invariant subspace $\mathfrak{M}$ in Theorem 3. Since the correspondence between wandering subspaces and the appropriate kind of invariant subspaces is one-to-one, there is only one uniqueness problem here, not two; the purpose of what follows is to solve it.

Uniqueness.

Suppose that F_1 and F_2 are rigid operator functions with (constant) initial spaces $\mathfrak{U}_1$ and $\mathfrak{U}_2$; under what conditions does it happen that $\hat{F}_1\mathfrak{H}_+ < \hat{F}_2\mathfrak{H}_+$? A trivial necessary condition is that $\hat{F}_1\mathfrak{K} < \hat{F}_2\mathfrak{H}_+$. This means that for each v in $\mathfrak{V}$ there exists an f in $\mathfrak{H}_+$ such that $F_1(z)\, v = F_2(z)\, f(z)$ almost everywhere. The function f is not uniquely determined, but an additional requirement makes it so. For each z, replace $f(z)$ by its projection into $\mathfrak{U}_2$. The result is a $\mathfrak{U}_2$-valued function whose value at each z is $F_1(z)\, v$; there is no loss of generality in assuming that f has these properties in the first place. Since $F_2(z)$ is an isometry on $\mathfrak{U}_2$, the value $f(z)$ is now uniquely determined, and, therefore, it makes sense to define an operator function G by $G(z)\, v = f(z)$. If $v \in \mathfrak{U}_1$, then

$$\| v \| = \| F_1(z)\, v \| = \| F_2(z)\, f(z) \| = \| f(z) \| = \| G(z)\, v \|,$$

so that $G(z)$ is an isometry on $\mathfrak{U}_1$; if $v \perp \mathfrak{U}_1$, then (almost everywhere) $F_1(z)\, v = 0$, so that $f(z) = 0$, and therefore $G(z)\, v = 0$. This implies that G is rigid, with initial space $\mathfrak{U}_1$; the range of $G(z)$, for almost every z, is included in $\mathfrak{U}_2$. Since, moreover, G maps $\mathfrak{K}$ into $\mathfrak{H}_+$, it follows (by definition) that G is a Taylor function. Conclusion: if $\hat{F}_1\mathfrak{H}_+ \subset \hat{F}_2\mathfrak{H}_+$, then $F_1 = F_2 G$, where G is a rigid Taylor function with initial space $\mathfrak{U}_1$ and range in $\mathfrak{U}_2$. It is convenient to say that F_1 is *divisible* by F_2 exactly when a G of this sort exists.

Lemma 6. *If F_1 and F_2 are rigid operator functions, then a necessary and sufficient condition that $\hat{F}_1\mathfrak{H}_+ \subset \hat{F}_2\mathfrak{H}_+$ is that F_1 be divisible by F_2.*

Proof. Necessity was just proved. Sufficiency is trivial: if $F_1 = F_2 G$, with G Taylor, then $\hat{F}_1\mathfrak{H}_+ = \hat{F}_2\hat{G}\mathfrak{H}_+ \subset \hat{F}_2\mathfrak{H}_+$.

How near does the divisibility relation come to being a partial order? Reflexivity and transitivity are easy to prove. The only delicate question is this: what happens when each of F_1 and F_2 is divisible by the other? Suppose that $F_1 = F_2 G_2$ and $F_2 = F_1 G_1$; here the values of G_2 are partial isometries with initial space $\mathfrak{U}_1$ and range in $\mathfrak{U}_2$, the values of G_1 are partial isometries with initial space $\mathfrak{U}_2$ and range in $\mathfrak{U}_1$, and both G_1 and G_2 are rigid Taylor functions. The first consequence of these assumptions is that almost every value of $G_1 G_2$ is equal to the projection on $\mathfrak{U}_1$. Indeed, since $F_1(z)\, G_1(z)\, G_2(z)\, v = F_1(z)\, v$ for all v, it follows that if $v \in \mathfrak{U}_1$, then $G_1(z)\, G_2(z)\, v = v$ (because $F_1(z)$ is one-to-one on $\mathfrak{U}_1$); if $v \perp \mathfrak{U}_1$, then $G_1(z)\, G_2(z)\, v = 0$ (because $G_2(z)\, v = 0$).

Observe now that almost every value of $G_1 G_1^*$ is also equal to the projection on $\mathfrak{U}_1$ (just because almost every value of G_1 is a partial isometry with initial space $\mathfrak{U}_1$); it follows that $G_1 G_2 = G_1 G_1^*$. Since the ranges of $G_2(z)$ and $G_1^*(z)$ are in $\mathfrak{U}_1$ and since $G_1(z)$ is one-to-one on $\mathfrak{U}_1$, it follows that $G_2(z) = G_1^*(z)$ on $\mathfrak{U}_1$. Since on $\mathfrak{U}_1^\perp$ both $G_2(z)$ and $G_1^*(z)$ vanish, it follows that $G_2(z) = G_1^*(z)$ on all $\mathfrak{B}$ for almost every z.

Suppose now that G is an operator function (such as G_1 above) with the property that both G and G^* are Taylor functions. It follows that if u and v are in $\mathfrak{B}$, then $\int (G(z)\, u, v)\bar{z}^n dz = 0$ and $\int (G^*(z)\, v, u)\bar{z}^n dz = 0$ for all $n < 0$. (The interchange of u and v in the second integral is deliberate.) The second equation is equivalent to $\int (G(z)\, u, v) z^n dz = 0$ for all $n < 0$ and hence to $\int (G(z)\, u, v)\bar{z}^n dz = 0$ for all $n > 0$. It follows (compare Lemma 3) that $(G(z)\, u, v)$ is a constant almost everywhere, and hence (u and v are arbitrary) that $G(z)$ is a constant almost everywhere. The conclusion is that, in the notation of the preceding paragraph, both G_1 and G_2 are constants. This conclusion can be expressed as follows.

Theorem 4. *If F is a rigid operator function, then $\hat{F}\mathfrak{H}_+$ uniquely determines F to within a constant partially isometric factor on the right.*

References.

[1] *A. Beurling*, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. **81** (1949), 239—255.

[2] *A. Brown*, On a class of operators, Proc. A. M. S. **4** (1953), 723—728.

[3] *E. Hille* and *R. S. Phillips*, Functional analysis and semi-groups, A. M. S., Providence (1957).

[4] *P. D. Lax*, Translation invariant spaces, Acta Math. **101** (1959), 163—178.

[5] *W. Rudin*, The closed ideals in an algebra of analytic functions, Can. J. Math. **9** (1957), 426—434.

Eingegangen 18. November 1960.